

博士学位论文

复杂偏好下多属性大群体决策方法研究
Large Group Decision-making Method with Complex
Preference

专 业 管理科学与工程

作 者 张丽媛

导 师 徐选华 教授

中南大学商学院
2013年 6月

中图分类号 C934

UDC 303

学校代码 10533

密级 公开

博士学位论文

复杂偏好下多属性大群体决策方法研究

Large Group Decision-making Method with Complex Preference

作者姓名：张丽媛
学科专业：管理科学与工程
研究方向：管理决策模型与方法
学院(系、所)：商学院
指导教师：徐选华 教授
副指导教师：

论文答辩日期_____

答辩委员会主席_____

中 南 大 学

2013年6月

原创性声明

本人声明，所呈交的学位论文是本人在导师指导下进行的研究工作及取得的研究成果。尽我所知，除了论文中特别加以标注和致谢的地方外，论文中不包含其他人已经发表或撰写过的研究成果，也不包含为获得中南大学或其他单位的学位或证书而使用过的材料。与我共同工作的同志对本研究所作的贡献均已在论文中作了明确的说明。

作者签名：_____ 日期：_____年__月__日

学位论文版权使用授权书

本人了解中南大学有关保留、使用学位论文的规定，即：学校有权保留学位论文并根据国家或湖南省有关部门规定送交学位论文，允许学位论文被查阅和借阅；学校可以公布学位论文的全部或部分内容，可以采用复印、缩印或其它手段保存学位论文。同时授权中国科学技术信息研究所将本学位论文收录到《中国学位论文全文数据库》，并通过网络向社会公众提供信息服务。

作者签名：_____ 导师签名_____ 日期：_____年__月__日

复杂偏好下多属性大群体决策方法研究

摘要:近年来,我国自然灾害和公共危机不断发生,给国家经济和人民生命财产造成了重大损失,使得应急决策成为研究的热点和重点。分析应急决策问题与其他决策问题的不同,根据应急决策问题的环境复杂多变,决策任务具有复杂性、动态性、不确定性和时效性,决策属性之间存在复杂的关系,提出了复杂偏好的概念。利用相似度模型解决复杂偏好下多属性大群体应急决策问题,并与其他大群体决策方法做比较,从数值结果可以看出本文方法的优势。

论文的工作主要包括以下几个方面:

(1)确定型偏好,主要研究矢量偏好型多属性大群体决策问题。首先介绍了两矢量之间的J-相似度、E-相似度和C-相似度,分析了它们的缺陷,在它们基础上构造了变系数相似度模型,并证明变系数相似度满足自反性、对称性、有界性。把变系数相似度模型以及现有的三种相似度模型应用到应急决策问题中,比较湖南省三个地级市(长沙市、株洲市、湘潭市)的重大冰雪应急管理能力的,通过计算三个城市的评价矢量与理想方案的评价矢量之间的加权相似度,排列三个城市。决策结果表明变系数相似度方法是有效的,其计算简单,可广泛应用到应急决策问题中。

(2)关联偏好,考虑决策属性之间的关联。首先考虑决策属性之间的层次关系,提出了基于三角函数的决策属性权重确定方法。利用群决策方法中偏好集结的思想,将决策结果逐层集结,得到最终决策结果。最后,利用属性层次偏好决策方法对2002-2009年全国自然灾害的数据,按年份划分等级,决策结果与实际一致。再次考虑决策属性之间的二元关系,提出了属性二元关系偏好的大群体决策方法。该方法基于二元关系形成群体成员偏好矢量属性关系矩阵,借助该关系矩阵是0-1矩阵及其范数性质,构建了两个决策成员偏好矢量相似度模型,基于该模型提出了一种大群体决策聚类方法和决策方案排序方法。最后以湖南省重大冰雪灾害应急管理能力的为案例,对该方法进行了应用。

(3)模糊偏好,详细的给出了直觉模糊集偏好型、三角模糊数偏好型、直觉三角模糊数偏好型、梯形模糊数语言值偏好型、直觉梯形模糊数偏好型、考虑属性二元关系直觉梯形模糊数偏好型、区间梯形模糊数偏好型多属性大群体决策方法,以及决策属性权重确定方法,通过构造相应的加权相似度模型,得到相应的方案排序方法。把每一种模糊偏好型多属性大群体决策方法去解决应急决策问题,与其他群决策方法比较,案例结果表明本文方法的有效性、可行性。图15幅,表40个,参考文献181篇。

关键词: 多属性决策, 应急决策, 复杂偏好, 大群体, 相似度方法

分类号: C934;TP311.52

Large Group Decision-making Method with Complex Preference

Abstract: In recent year, the natural disaster and public crisis continue to occur, which caused significant damage to the national economy and people's lives and property, so emergency decision making problem become the focus and emphasis of decision science. We analyze the difference between the emergency decision-making problem and other decision-making problem, according to the emergency decision environment's complexity and variety, the decision task's complexity, variety, uncertainty and timeliness, and the complex relationship between the decision attribute, we give the definition of complex preference. Using the similarity measure to solve the multiple attribute group decision making problem with complex preference, we also compare our method with the other group decision making method, the numerical results show our method's merits. Thesis work mainly includes the following aspects:

(1) Deterministic preferences. We mainly study multiple attribute large group decision making (MALGDM) problem with vector preference. Firstly, we introduce the J-similarity measure, E-similarity measure and C-similarity measure, there are some defects in the above three similarity measures, so we provide the variational coefficient similarity measure based on the three similarity measure, which satisfy reflexivity, symmetry and boundedness. Then, we apply the variation coefficient similarity to evaluate the emergency management capability of major snow disaster in Hunan province of China. For comparison, the decision results of different similarity measures are also given, which show that our method have better similarity identification and the proposed method is applicable.

(2) Associated preference. Consider the association between the

decision attribute, we discuss the hierarchical relationship between the decision attribute. A new method based on the trigonometric functions to determine the weight of decision attribute is proposed. By using the method of preference aggregation for large group decision making, we get a new model for evaluating grade of natural disaster loss based on the hierarchy of evaluation index and its algorithm. Lastly, the paper presented the result of dividing gradation of the condition of the natural disaster for 2002-2009 in Chinese. We introduce a new method of large group decision based on binary relationship attributes. By using binary relation of the decision attributes, the relation matrix which is a 0-1 matrix is formed. With the property of 0-1 matrix and the norm of the matrix, this paper establishes a new large group preference aggregating model and proposes the method of evaluation schemes ranking. Finally, an example of Hunan province emergency management capability of major snow disaster is presented to authenticate the method of MALGDM.

(3) Fuzzy preference. We give a detailed introduction about MALGDM problem with intuitionistic fuzzy set preference, triangular fuzzy preference, intuitionistic triangular fuzzy preference, trapezoidal fuzzy linguistic preference, intuitionistic trapezoidal fuzzy preference, intuitionistic trapezoidal fuzzy binary preference, internal trapezoidal fuzzy preference. We provide the method to compute the weight of the attribute with fuzzy information. By constructing the corresponding weighted similarity model, we get the order of each alternative and the best alternative. Finally, we apply the above methods to solve the emergency decision-making problem, and compare with the other decision-making methods, the decision results show our method is effective and applicable. There are 15 figures, 40 tables and 181 references.

Keywords: Multiple attribute decision-making, Emergency decision-

making, Complex preference, Larger group, Similarity measure

Classification: C934;TP311.52

目 录

原创性声明	I
摘要	III
Abstract	V
目录	XI
符号说明	XII
1 导论	1
1.1 选题背景及研究意义	1
1.2 国内外研究现状综述	2
1.2.1 复杂偏好下多属性大群体决策问题的研究现状	2
1.2.2 相似度模型的研究现状	3
1.3 本文研究问题描述	6
1.4 论文的总体结构	7
2 基于矢量偏好的多属性大群体决策方法	10
2.1 引言	10
2.2 变系数相似度模型	10
2.3 几种不同相似度之间的比较	12
2.4 变系数相似度在应急决策中的应用	14
2.4.1 决策问题描述	14
2.4.2 应急决策案例分析	15
2.5 本章小结	18
3 基于属性层次关系偏好的多属性大群体决策方法	19
3.1 决策问题研究背景	19
3.2 基于属性层次关系的属性权重确定方法	19
3.3 基于属性层次关系的偏好矢量集结	20
3.4 基于属性层次关系的大群体应急决策方法	21
3.4.1 基于属性层次关系的评价模型的算法	21
3.4.2 自然灾害等级评价实例分析及结论	23
3.5 本章小结	25
4 基于属性二元关系偏好的多属性大群体决策方法	26
4.1 决策问题研究背景	26

4.2	基于属性二元关系的偏好矢量间相似度	27
4.3	基于属性二元关系的大群体聚类算法	28
4.3.1	属性关系矩阵 $T = \{T^i\}$ 形成	29
4.3.2	基于二元关系 Q 的决策成员偏好矢量聚类	29
4.4	聚类算例及算例结果的比较	30
4.4.1	基于不同二元关系 Q 的算例结果比较	30
4.4.2	不同的聚类方法的算例结果比较	33
4.5	基于属性二元关系偏好的决策方案排序	34
4.5.1	基于属性二元关系的决策属性权重	34
4.5.2	基于属性二元关系的决策方案排序原则	35
4.6	基于属性二元关系的偏好相似度在应急决策中的应用	35
4.7	本章小结	39
5	基于模糊集偏好的多属性大群体决策方法	40
5.1	模糊集的概念及两模糊集间的相似度	40
5.2	直觉模糊集的概念及两直觉模糊集间的相似度	43
5.2.1	直觉模糊集	43
5.2.2	基于直觉模糊集的变系数相似度模型	44
5.3	不同的两直觉模糊集之间的相似度的比较	47
5.4	直觉模糊集相似度的应用	49
5.4.1	模式识别案例分析	49
5.4.2	医学诊断案例分析	50
5.4.3	模糊多属性多方案决策案例分析	51
5.5	基于直觉模糊集得分矢量间相似度的多属性群决策方法	53
5.5.1	直觉模糊集的得分函数	53
5.5.2	直觉模糊集的得分矢量之间的相似度	54
5.5.3	基于得分矢量相似度的模糊多属性大群决策方法	56
5.5.4	模糊偏好多属性大群体应急决策案例分析	57
5.5.5	与其他方法比较	61
5.6	本章小结	63
6	基于模糊数偏好的多属性大群体决策方法	65
6.1	模糊数及其拓展形式	65
6.1.1	引言	65

6.1.2	模糊数、直觉模糊数和区间直觉模糊数	65
6.2	基于三角模糊数偏好的多属性大群体决策方法	67
6.2.1	三角模糊数及三角模糊数间的相似度	68
6.2.2	基于相似度的三角模糊偏好多属性群决策方法	69
6.2.3	案例分析	71
6.2.4	小结	73
6.3	基于参数型直觉三角模糊数偏好的多属性大群体决策方法	74
6.3.1	三角直觉模糊数和参数型直觉三角模糊数	74
6.3.2	参数型直觉三角模糊数间的相似度	78
6.3.3	参数型直觉三角模糊数偏好的多属性大群体决策方法	79
6.3.4	案例分析	81
6.3.5	小结	84
6.4	本章小结	84
7	基于梯形模糊数偏好的多属性大群体决策方法	86
7.1	改进的TOPSIS方法在梯形模糊偏好多属性决策问题中的应用	86
7.1.1	梯形模糊数及其性质	86
7.1.2	改进TOPSIS方法及应用	88
7.1.3	案例分析	90
7.1.4	小结	93
7.2	基于参数型直觉梯形模糊数偏好的多属性决策方法	94
7.2.1	参数型直觉梯形模糊数及相似度	94
7.2.2	参数型直觉梯形模糊数偏好多属性决策方法	97
7.2.3	案例分析	98
7.2.4	小结	100
7.3	考虑属性二元关系的参数型直觉梯形模糊偏好多属性大群体决策	101
7.3.1	基于属性间二元关系的参数型直觉梯形模糊数的相似度	101
7.3.2	参数型直觉梯形模糊偏好大群体聚类方法	102
7.3.3	聚类案例分析	103
7.3.4	基于属性二元关系的参数型直觉梯形模糊偏好大群体决策方法	106
7.3.5	案例分析	107
7.3.6	小结	112
7.4	区间梯形模糊数型偏好多属性大群体决策方法	112

7.4.1	区间梯形模糊数及相似度.....	113
7.4.2	区间梯形模糊数型偏好多属性大群体决策方法.....	116
7.4.3	案例分析.....	118
7.4.4	小结.....	122
7.5	本章小结.....	122
8	结论与展望	123
8.1	本文结论.....	123
8.1.1	主要工作.....	123
8.1.2	创新点.....	124
8.1.3	研究不足.....	127
8.2	研究展望.....	127
	参考文献.....	128
	附录 主要程序.....	141
	攻读博士学位期间主要科研成果.....	160
	致谢.....	162

符号说明

A 表示直觉模糊集或者方案集合

B 表示直觉模糊集

C 表示属性集合

C^k 表示第 k 个聚集

D 表示直觉模糊集的得分函数

E 表示专家的期望偏好矢量

F 表示直觉模糊集的精确函数

G 表示专家集合

H 表示聚集的偏好矢量

i 表示第 i 个方案

j 表示第 j 个属性

k 表示第 k 个专家

m 表示决策专家的个数

n 表示决策属性的个数

O 表示决策结果矢量

p 表示方案的个数

R 表示相对相似度函数

S 表示相似度函数

T 表示矩阵

U 表示决策专家的群体偏好矢量

V 表示决策专家的偏好矢量

W 表示决策属性的权重矢量

X, Y 表示向量空间的矢量

Z 表示0-1标准变换函数

1 导论

1.1 选题背景及研究意义

本论文来源于国家自然科学基金项目“面向冲突的多目标多阶段复杂动态应急决策模型研究”(编号:71171202)、国家创新研究群体科学基金项目“复杂环境下不确定性决策的理论与应用研究”(编号:70921001)、“面向特大自然灾害的复杂随机多维属性大群体决策模型研究”(编号:70871121)和国家社会科学基金重点项目“区域重特大灾害社会风险演化机理研究”(编号:12AZD109)。

近年来,我国自然灾害和公共危机不断发生,灾害的种类明显增加,发生的频率明显增高,涉及的范围越来越大,灾害的复杂性和应对的难度逐渐加大,给我国造成了严重的社会问题,给国家经济和人民生命财产造成了重大损失。近三年我国各类自然灾害共造成约13.5亿人次受灾,直接经济损失高达10973.9亿元(其中2009年约4.8亿人次受灾、经济损失2523.7亿元;2010年约4.3亿人次受灾、经济损失5339.9亿元;2011年约4.4亿人次受灾、经济损失3110.3亿元),2012年我国各类重特大灾害更是呈现快速增加态势,据民政部统计2012上半年全国各类自然灾害共造成11336.1万人次受灾,直接经济损失达773.8亿元。“国家十二五发展规划”和党的“十七届五中和六中全会”把灾害监测预警和防治应急救援以及风险防范和社会科学发展等放在非常突出的重要位置,所以应急管理方面的研究是国家长期科学和技术发展规划战略的重大领域之一。

应急管理是一个多阶段交互的动态过程,大体包括:事件监测预警、先期处置、信息报告、相关应急预案启动、应急响应、指挥协调、扩大应急、善后处置、调查评估、恢复重建和信息发布等。应急决策问题具有复杂性、不确定性、动态性和时效性等特点。特大型自然灾害公共危机应急协调决策涉及的面非常广,在实际决策中,需要调动各个部门参与决策,最短的时间找出最优决策方案,尽快地达成各方都能够最大限度接受的决策方案,最快地投入应急处置以便最大限度地减少损失。这使得群体决策尤其是大群体决策甚至特大群体决策成为当下学者研究的热点,开发相应的大群体甚至是特大群体决策支持系统和信息系统,也是研究的热点。然而对于大群体决策支持系统和信息系统的关键是利用相应的大群体决策方法建立大群体决策问题的模型。本文针对我国应急决策问题面临的复杂决策环境,决策任务的复杂性、动态性、不确定性和时效性,探讨复杂随机多维属性大群体决策的新特点,以相应的大群体应急决策问题的不同相似度为基础,提出新的决策方法,更简单快速地对决策方案排序,找出最优方案。

多属性大群体决策问题广泛存在于社会、经济、管理等各个领域,如投资

决策、项目评估、质量评估、方案选优、工厂选址、资源分配、科研成果评价、人才考核、产业部门发展排序、经济效益综合评价等，因此多属性大群体决策理论及方法有着广阔的应用前景，对多属性决策理论、方法及其应用进行系统的研究具有重要的学术价值和实践意义。随着自然和经济环境的变化，决策正由个体决策、小规模群决策向复杂大群体决策转变，有关群决策方法和群决策支持系统的研究重点也发生转变。群决策技术和方法由小规模群决策方法向复杂大群体决策方法转变；群决策支持系统的研究重点也由支持个体和小规模群决策向支持复杂大群体决策转变。而复杂大群体理论研究越来越注重从小规模群体转向复杂大群体角度分析问题和解决问题，目前国内外关于复杂大群体需求的决策研究刚刚开始，这些研究大多还处于探索阶段，缺乏可以操作的有效技术和方法，所以研究大群体决策理论与方法有重要的学术价值和实践意义。

1.2 国内外研究现状综述

复杂偏好下的应急决策问题大多表现为多属性决策问题，大致分为两大类^[1]：一是求解决策问题，即制定决策问题的最佳决策方案；二是多方案排序的问题，即在众多决策方案中，选择最优和次优的方案。许多国内外学者对上述两大类问题做了深入的研究，取得了丰硕的研究成果。多属性大群体决策问题的求解方法方法有很多，相似度方法作为简单有效的方法，取得了很大的成就。本节将从复杂偏好下多属性大群体决策问题和相似度模型两个方面进行研究现状的总结和综述。

1.2.1 复杂偏好下多属性大群体决策问题的研究现状

随着现代经济和科学技术的发展，当下应急决策问题出现了新的特点，根据调研发现以下新特点：一是群体规模比较庞大，其成员分布广泛，如特大自然灾害应急决策问题，其参与决策人员涉及范围广，需要各级政府行政管理人员、政府各个职能部门人员、相关的各个行业人员、相关的企事业单位人员、相关领域的专家和学者等，而且需要在最短的时间召集他们参与决策。同时他们又是具有不同权重的相互协作、利益基本一致和某些利益冲突关系的大群体，因此需要找出合理、科学的决策方法，使得决策结果有科学依据。二是决策属性呈现多维性、复杂性和随机性，表现在决策问题存在多个维度的评判属性，这些属性的重要性存在差异，属性之间可能不仅存在复杂的关联关系，而且属性值呈现随机性，这给决策问题带来复杂性。三是目前对群体一致性和偏好集结忽视了决策成员的不完全理性和对决策方案的学习改进及谈判协调能力。因此在现实中，决策质量并不一定是群决策的完全充分条件，决策结果能否被群体接受或在多大程度上能否被群体接受往往更具有现实意义和更能快速推广和容易实施（摘

自国家自然科学基金项目,“面向特大自然灾害的复杂随机多维属性大群体决策模型研究”)。

在过去的几十年里,群决策理论和方法取得了丰硕的研究成果^{[2], [3]-[8]}。进入二十一世纪,随着网络技术的发展,大群体决策问题引起了越来越多学者的关注,特别是在应急决策中,在最短的时间做出最有效的决策需要多个领域不同的专家参与决策。传统的群决策方法不适合解决大群体决策,徐选华在文献^[9]定义了复杂大群体的概念,并给出网络环境下复杂大群体决策问题的求解流程以及求解方法。解决复杂大群体决策问题的关键是对决策成员进行有效的聚类,Zahir利用两个决策成员之间的偏好向量之间的数量积^[10]来说明对应的两个决策成员之间的关系,利用相似关系把决策成员划分到同一聚集中。Basak和Saaty在文献^[11]利用统计方法将各个成员划分到同类聚集。另外,Xu在文献^[12]用AWA算子集结决策成员的信息得到群体矩阵,提出一种大群体决策方法。文献^[13]将改进后的AHP方法解决群决策问题。徐选华^[14]等将各个属性权重向量和群体偏好矩阵进行合成,由各方案的综合评价向量,决定决策方案排序。文献^[15]提出了一种面向效用值偏好信息的大群体决策方法。但是这些大群体决策方法未考虑属性之间的关系,以及大群体决策问题的复杂性等新特点,不适合解决复杂偏好下大群体决策问题。分析上述方法的不足,本文尝试从一个新的角度出发,基于不同的相似度模型,提出一种新的复杂偏好下大群体决策方法,在接下来几章中,将看到本文方法的优势。

1.2.2 相似度模型的研究现状

相似度方法作为解决复杂大群体多属性决策问题的有效方法,国内外学者对相似度模型的研究大致分为三个阶段:第一个阶段:相似度的出现;第二个阶段:相似度模型的发展;第三个阶段相似度模型在多属性决策问题中的应用。

第一个阶段:相似度的出现;相似性在知识和行为理论中起着重要的作用,在心理学的文献中得到了广泛研究和应用^[16]。相似性关系的理论分析由几何距离模型主导,这些模型用坐标空间的点表示研究对象,对象的差异对应相应点的距离,语言的接近程度通常采用几何模型法表示。Tversky^[17]把相似性描述为属性匹配过程,对象的相似性被表示为它们相同和不同属性度量的线性组合。相似性的测度,也可以用来评估两个集合的相似性测度。Parui和Majumder^[18]定义了形状距离和形状相似性。Rao^[19]讨论了平面上有限集的相似性。但是上述理论方法较少涉及到用相似度模型解决多属性大群体决策问题。

第二个阶段:相似度模型的发展;在不确定信息比较方面,相似度(Similarity Measure)是一种常用的测量工具,尤其在模糊信息比较方面。Zadeh在1965年第一次提出了模糊集理论^[20],这些理论已被广泛应用于各个领域。Chen、Yeh等在文献^[21]扩展了Pappis和Karacapilidi在1993年提出的两个模糊集之间的相似

度^[22]，并证明其满足一些性质，该文章把所有基于几何模型和理论的6种相似度进行了比较，有一些普通的性质并不适合所有的相似度，把现有的6种相似度按照满足的性质分类，可以为决策者提供有效的信息，来选择哪种最适合的相似度。Wang在文献^[23]提出两种新的相似度模型，利用两个模糊集的最大函数和最小函数的比值，构造两个模糊集的相似度，并证明其满足对称性、自反性和有界性，针对现有的几种模糊集的相似度 ($M(A, B)$ ^[22], $L(A, B)$ ^[22], $K(A, B)$ ^[24], $C(A, B)$ ^[24])，用一些数值例子与已有文献中的方法比较，数值结果表明，Wang提出的两个模糊集之间的相似度比其他的相似度更有效。

第三个阶段：相似度模型在多属性决策问题中的应用，在这一个阶段相似度理论发展迅速而且得到广泛应用。Atanassow在1986年将模糊集理论拓展到直觉模糊集^[25]，其包含隶属度、非隶属度和犹豫度这三方面的信息。由于直觉模糊集比传统的模糊集能够更细腻的描述和刻画客观世界的模糊性本质，近年来人们对于直觉模糊集理论的研究产生了浓厚的兴趣，并取得了丰硕的成果。两个直觉模糊集之间的相似度已经成为研究热点，并且在模糊多属性决策领域得到了广泛应用。相似度模型同时也被应用于其他领域，包括决策科学、线性规划、模式识别以及医学诊断等。许多学者对于两个直觉模糊集的相似度提出了很多方法，概括为两大类方法：一是基于两个直觉模糊集距离基础上构建两直觉模糊集的相似度，包括Hamming距离相似度、Hausdorff距离相似度、Euclidean距离相似度，以及由数学中距离模型拓展得到的相似度；另一类方法把直觉模糊集看成一矢量，利用矢量空间已有的模型构造两直觉模糊集的相似度，如Cosine相似度。Li和Cheng在文献^[26]提出一种两个直觉模糊集的相似度，并首次应用这种方法解决模式识别问题。Liang和Shi在2003年，发现现有的一些相似度模型的缺点，提出一些新的相似度的模型^[27]，并证明它们之间的关系。更进一步，Szmidt和Kacprzyk在海明距离的基础上，构造了两个直觉模糊集的海明距离^[28]，并把它应用解决大群体决策问题；另一方面，Huang和Yang在Hausdorff距离的基础上，用两个直觉模糊集的Hausdorff距离^[29]作为两个直觉模糊集的相似度，并把它应用于求解模糊线性规划问题。Xu在几何距离模型的基础上，提出了两个直觉模糊集的相似度，并定义了正理想直觉模糊集和负理想直觉模糊集^[30]。Ye在文献^[31]通过计算两个直觉模糊集的夹角余弦，来定义两个直觉模糊集的相似度，并把它应用于解决医学诊断问题和模式识别问题。上述这些相似度方法可用于解决模糊环境下的多属性（多准则）决策问题。

在模糊集和直觉模糊集的基础上，国内外学者对直觉模糊集进行了拓展，目前关于它的拓展形式主要有区间直觉模糊数、区间模糊数、三角模糊数、三角直觉模糊数、区间三角模糊数、梯形模糊数、参数型直觉梯形模糊数、区间梯形模糊数、区间直觉梯形模糊数等，后四种将模糊集从离散集合扩展到连续集合。徐泽水^[32]给出了三角模糊数的定义，提出了对方案有偏好的三角模糊数型多

属性（多准则）决策方法。Shu等人对直觉模糊集进行了拓展，定义了参数型直觉三角模糊数^[33]，并应用于故障树分析。Abbasbandy和Hajjari在文献^[34]引入了一种新的直觉梯形模糊数的排序方法，这些理论为以后的直觉梯形模糊多属性决策问题提供了理论依据。王坚强又进一步拓展模糊数，定义了直觉梯形模糊数^[35]的概念，将离散集合扩展到连续集合，同时给予直觉梯形模糊数的期望值，给出了不完全信息下的多属性（多准则）决策方法。文献^[36]定义了直觉梯形模糊数的期望值得分函数、精确函数和几何平均算子，并给出了在多属性多方案群决策问题中的应用。在文献^[37]中，决策问题的属性值和权重都是用区间梯形模糊数表示，通过加权集结算子来解决决策问题。Liu在文献^[38]，通过定义权重集结算子来解决多属性（多准则）决策问题，其决策者的偏好信息及决策者属性权重用直觉梯形模糊数表示。Nehi和Maleki在2005年提出参数型直觉梯形模糊数^[39]，以及参数型直觉梯形模糊数的运算法则，引起了学术界的广泛关注。Ye在文献^[40]给出参数型直觉梯形模糊属性权重的确定方法，并用参数型直觉梯形模糊表示决策方案的信息，通过权重集结算子确定决策方案的排序。相似度作为解决模糊多属性决策问题的一个重要方法，较少地应用于解决参数型直觉梯形模糊决策问题，Ye在文献^[41]把参数型直觉梯形模糊数看成一个矢量，并计算其期望值，提出了基于向量相似度的决策方法，但是计算较为复杂，而对于理想方案的确定过于笼统。对于在三角模糊信息下及参数型直觉梯形模糊偏好下，用相似度来解决模糊多属性决策问题仍是一空白，有大量工作值得我们去研究。

另一方面，现实生活中许多决策问题，由于信息的模糊性和不确定性等客观因素，以及决策者认知能力、知识结构、经验等主观因素，用模糊数来表达决策者的偏好信息是群决策问题的一种有效方法，更能客观准确地表示决策事物的性质^[42]，为模糊多属性决策问题提供了有力工具。Bellman和Zadeh在1970首次提出了模糊决策问题的基础模型^[43]和模糊数学的理论，为以后的研究打下基础。随后，国内外学者提出了模糊多属性决策问题的许多方法，如加权平均算子^[44]、几何平均算子^[45]、TOPSIS方法^[46]、层次分析法^[47]、灰色理论分析法^[48]、相似度方法^[49]等。但是这些方法较少的应用到应急决策管理领域。继2008年初中国南方发生五十年一遇的雨雪冰冻灾害之后，我国部分地区接连遭遇罕见的暴雨雪天气、干旱、泥石流和洪涝灾害等，经济损失达数千亿元，因此中国已处于各种灾害的高风险之中。重大灾害应急决策环境越来越复杂，决策者面临的不确定因素增多，各因素之间的关系呈现复杂的关联性，所承受的决策风险愈来愈大。因此对灾害应急能力评价和应急管理是政府以及学术界研究的重大课题之一，科学合理的表达决策者的偏好信息也是一研究难点，用模糊信息表达决策者的偏好信息给应急决策提供科学依据。此外，在应急决策中，决策属性之间存在复杂的关系，专家对于属性间的关系，给出的是不确定的、模糊的，如属性间“远大于”关系、“相似”关系、“远远小于”关系等，这些关系都可以转化为

二元关系定量给出,使得复杂的应急决策问题更能科学化解决。因此,构造基于属性二元关系的相似度模型,解决多属性决策问题,也是本文要做的工作之一。考虑决策属性间二元关系,以此构建两个矢量的相似度模型,为基于属性二元关系的复杂大群体决策方法打下基础。

相似度方法作为模糊多属性决策问题的有效方法,被广泛应用于各个领域。本文主要工作是在相似度模型的基础上提出复杂偏好下多属性大群体应急决策方法。

1.3 本文研究问题描述

应急决策问题与其它领域的决策问题的不同之处在于:一是决策问题属性存在较大差异,按照应急决策对应的灾害和公共危机的性质分类,不同类型的应急决策问题的决策属性是不同的,表现为多种形式,主要有:1.决策属性为独立型和关联型,例如在应急资源调配中,食物、水、帐篷等应急资源都是按照一定的比例配置。若把每种资源看成决策问题中的各个属性,那么属性间存在关系,这种“比例”关系是一种二元关系。传统的群决策方法是建立在决策属性之间相互独立的基础之上的,很显然传统的群决策方法不能解决上述问题。在应急决策中,决策属性之间存在复杂的关系可以转化为二元关系定量给出,使得复杂的应急决策问题更能科学化解决;2.属性的数量为固定型和变动型;3.属性值为确定型 and 不确定型,例如属性值确定型的有矢量性属性值,当决策无法用确定值表示属性值,可采用语言值、模糊数、模糊集等表示属性值。二是参与这种决策问题的决策群体规模比较大,且决策专家之间的偏好差异比较大,他们的偏好之间存在显性和隐性的冲突,其决策偏好信息表现为确定型和不确定型,其中不确定型决策偏好信息按照其表现形式的不同,可以分为:效用值偏好信息、残缺值偏好信息、不确定语言值信息、随机值偏好信息、模糊数偏好信息、模糊集偏好信息和关系偏好信息等,这就给应急决策问题的解决和应急应对决策带来了复杂性和困难。

由于应急决策问题的环境复杂多变,决策任务具有复杂性、动态性、不确定性和时效性,决策属性之间存在复杂的关系。决策专家考虑上述因素,用模糊信息、语言值信息、矢量信息,以及考虑决策属性之间的二元关系、层次关系来表示决策方案的决策偏好,统称为复杂偏好,主要有矢量偏好、效用值偏好、残缺值偏好、不确定语言值偏好、随机值偏好、模糊数偏好、模糊集偏好和关系偏好等。

在现实生活中,应急决策正面临复杂自然和经济环境下群决策和复杂大群体决策支持系统开发问题,基于复杂偏好下多维属性大群体决策模型与技术是解决上述复杂大群体决策支持系统开发问题的关键策略之一。然而,传统的群决策技术与方法难以适用于复杂大群体决策的需求,不能用于解决复杂大群体

决策支持系统开发问题。本文的研究就是针对上述应急决策问题中的需求,利用不同的相似度模型,建立一套复杂偏好下多属性大群体决策的新模型和新技术,因而可以帮助解决面向特大自然灾害公共危机处理的复杂大群体决策支持系统的开发问题。

1.4 论文的总体结构

本文主要研究复杂环境下确定型偏好、关联型偏好、模糊型偏好的三大类多属性大群体应急决策问题。相似度模型作为解决模糊决策问题一种有效的方法,本文把它应用到矢量偏好下多属性大群体决策问题,属性关联偏好下多属性大群体决策问题和模糊数(集)偏好下多属性大群体决策问题,以及模糊数的拓展形式型模糊多属性大群体决策问题。对应案例的决策结果表明,基于相似度模型的多属性大群体决策方法是可行的、有效的。

本文所有模型的算法程序采用MATLAB 9.0进行编写和调试,详见附录。

论文共分为八章。各章的内容如下:

第一章为导论,主要介绍本文的研究背景、研究目的和意义,此外本章还介绍了复杂偏好下多属性大群体决策问题的研究现状以及相似度模型的研究现状,给出了复杂偏好的概念。最后简要介绍了论文的总体结构。

第二章给出了变系数相似度模型并证明其满足(1)自反性;(2)对称性;(3)有界性,同时把变系数相似度与文献中已有的其它三种相似度,进行算例比较,数值结果表明本章提出的变系数相似度不仅弥补现有相似度的缺陷,更能准确刻画两矢量之间的相似性。为了说明变系数相似度的实用性,把本章方法应用到应急决策中,并与其它方法进行比较,案例结果表明本章方法的有效性和实用性。

第三章考虑属性间层次关系,提出了属性层次关系偏好下的多属性决策方法,该方法利用三角函数的性质,确定了层次关系下决策属性权重的确定方法,同时给出了基于该方法的自然灾害等级评价模型及其算法。用2002年-2009年的全国自然灾害统计数据对该自然灾害等级评价模型进行应用,案例结果与实际情况一致。

第四章提出了一种基于决策属性之间二元关系的大群体决策方法,该方法基于二元关系形成群体成员偏好矢量属性关系矩阵,借助0-1矩阵及其范数性质,构建了两个决策成员偏好矢量相似性度量模型,基于该模型提出了一种大群体决策聚类方法和决策方案排序方法,并将本章方法与其他文献中聚类方法进行比较,数值结果表明本章方法是有效的。最后以湖南省重大冰雪灾害应急管理评价为案例,对本章方法进行了应用。

第五章主要讨论了用模糊集和直觉模糊集来表示决策专家偏好信息和属性权重信息的多属性大群体决策问题。在5.1节介绍模糊集的概念以及两个模糊集

之间的四种相似度，并证明它们满足相似度所具有的性质；5.2节给出了直觉模糊集的性质以及两个直觉模糊集之间的J-相似度、E-相似度、C-相似度和变系数相似度，并证明它们满足相似度的性质，同时考虑元素的权重，提出加权J-相似度、加权E-相似度、加权C-相似度和加权变系数相似度。为了更好说明本文的E-相似度和变系数相似度模型的优势，在5.3节与文献[31]的13种相似度进行比较，数值结果表明本章的两种相似度有很好的识别性，列举一多属性应急决策案例，可以看出本文的两种相似度是有效的。在5.4节继续讨论E-相似度和变系数相似度的实用性，把它们应用解决模糊模式识别问题、模糊医学诊断问题以及模糊多属性多方案决策问题，决策结果更好的表明本章两种相似度的优势。在模糊环境下传统的大群体决策方法比较复杂，借助于直觉模糊集的得分函数，提出了基于直觉模糊集得分矢量间相似度的大群体决策方法，在5.5节详细讨论这种方法的有效性及其实用性，5.6节给出本章的小结。

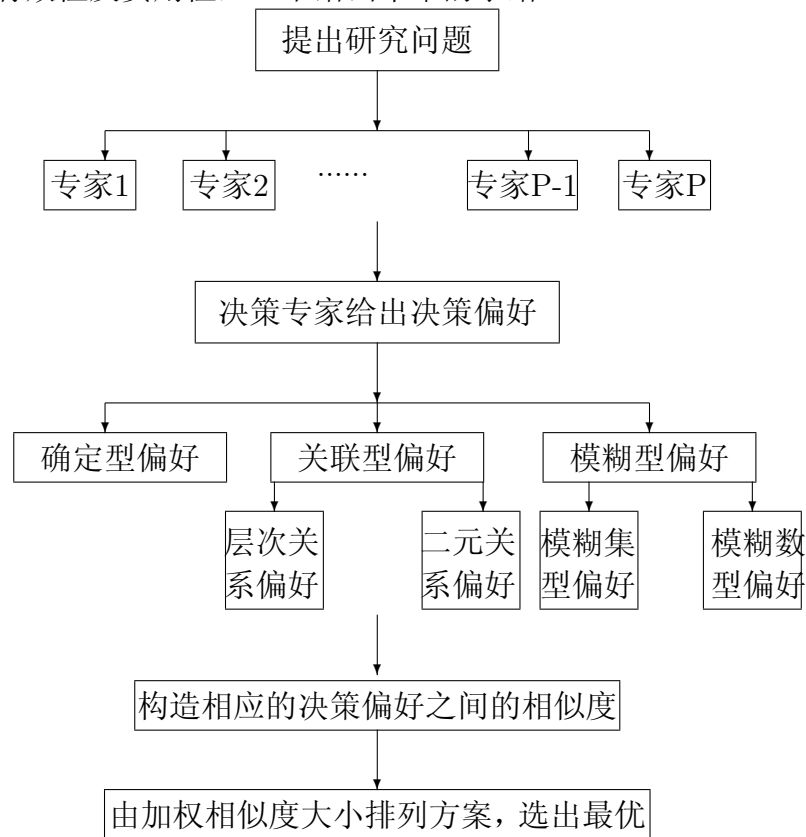


图 1-1 论文的研究框架

在第五章的基础上，从另一方面，我们在第六章和第七章研究基于模糊数及其拓展形似（直觉模糊数^[50]、区间直觉模糊数^[51]、三角模糊数^[52]、参数型直觉三角模糊数^[53]、区间三角模糊数^[54]、梯形模糊数^[55]、参数型直觉梯形模糊数^[41]、区间梯形模糊数^[38]）之间的相似度，并基于此相似度提出模糊偏好下大群体决策方法。第六章给出模糊数、直觉模糊数及其拓展形式；重点介绍三角模糊数，构造两个三角模糊数之间的相似度，并提出基于三角模糊数相似度的多属性

大群体决策方法；同时，把三角模糊数从另一个方面拓展得到参数型直觉三角模糊数，给出了基于参数型直觉三角模糊数相似度的多属性大群体决策方法。

近年来，关于梯形模糊数及其拓展形式（参数型直觉梯形模糊数和区间梯形模糊数）在多属性决策中的应用刚刚起步，许多学者将传统的决策方法引入到梯形模糊数型多属性决策问题中。因此在第七章我们继续研究基于模糊数的拓展形式：梯形模糊数^{[56]–[58]}、参数型直觉梯形模糊数^[41]、区间梯形模糊数^[38]，以及它们的基本运算法则和它们的相似度，并基于此相似度提出模糊大群体决策方法。本章主要内容包括：7.1节给出梯形模糊数、梯形模糊数的运算法则以及基于梯形模糊数间相似度的多属性大群体决策方法；7.2节给出参数型直觉梯形模糊数以及两参数型直觉梯形模糊数的期望矢量之间的相似度，并基于此提出模糊多属性决策方法；7.3节考虑决策属性间二元关系给出参数型直觉梯形模糊数偏好型多属性大群体决策方法；7.4节给出区间直觉梯形模糊数以及它们之间的相似度，构造区间直觉梯形模糊数偏好型多属性大群体决策方法；7.5节给出本章内容的小结。

第八章是本文的结论与展望。

为了更简洁的表述本文的研究内容，给出论文的研究框架，如图1-1。

2 基于矢量偏好的多属性大群体决策方法

2.1 引言

在过去的几十年里，群决策理论和方法取得了丰硕的研究成果，它们被广泛应用于社会学、经济学、军事科学、计算机和通信网络等领域。目前，群决策理论主要有：群体效应理论、社会选择理论^[2]、群体行为决策理论、模糊群体决策理论、名义群体理论 (Normal Group Technique, NGT) 等。群决策一直是众多学者研究的主题之一，并取得了很多优秀的成果。常见的群决策方法有：Delphi方法、层次分析法 (AHP)^[3]、基于证据距离和模糊熵权变换的多属性群决策方法^[59]、基于模糊判断矩阵的群决策方法^[8] 等。随着网络技术的发展，越来越多的决策问题需要多个群体成员 (大群体) 协商完成，尤其是在应急决策中，需要各个领域不同的专家在最短的时间做出最有效的决策。上述传统的群决策方法不适合解决大群体决策，因此，Xu在文献^[12]用AWA算子集结决策成员的信息得到群体矩阵，提出一种大群体决策方法。文献^[13]将改进后的AHP方法解决群决策问题。徐选华^[14]等将各个属性权重向量和群体偏好矩阵进行合成，由各方案的综合评价向量，决定决策方案排序。文献^[15]提出了一种面向效用值偏好信息的大群体决策方法。本文尝试从一个新的角度出发，考虑大群体应急决策问题中的新特点。基于矢量间相似度，提出了一种新的矢量偏好下大群体决策方法，在下面的几小节将详细的介绍这种方法以及在应急决策中的应用。

2.2 变系数相似度模型

相似度是刻画两个客观事物相似性的重要量度，两矢量间的相似度有很多定义方法，本节主要介绍三种重要的两矢量间的相似度。

设 $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ 和 $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ 是实数集 R 上的两个 n 维矢量，且所有分量都是正实数。

Jaccard在1901年，定义了两个矢量间的J-相似度^[60]，如下：

定义2.1 两矢量 X 和 Y 之间的J-相似度如下：

$$J(X, Y) = \frac{XY}{\|X\|_2^2 + \|Y\|_2^2 - XY} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{i=1}^n y_i^2 - \sum_{i=1}^n x_i y_i}, \quad (2-1)$$

这里 $XY = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ 是矢量 X 和 Y 的内积， $\|X\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ 和 $\|Y\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}$ 是矢量 X 和 Y 的Euclidean 范数 (也称 L_2 范数)。

Dice给出另一种两矢量间的E-相似度^[61], 见定义2.2。

定义2.2 E-相似度定义如下:

$$E(X, Y) = \frac{2XY}{\|X\|_2^2 + \|Y\|_2^2} = \frac{2 \sum_{i=1}^n x_i y_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{i=1}^n y_i^2}. \quad (2-2)$$

Salton和McGill用两个矢量之间的夹角余弦值来定义两矢量之间的C-相似度^[62], 如定义2.3。

定义2.3 C-相似度定义如下:

$$C(X, Y) = \frac{XY}{\|X\|_2 \|Y\|_2} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}}. \quad (2-3)$$

上述三种矢量间的相似度的定义都存在一定的缺陷, 定义2.1和定义2.2中, 若 $x_i = y_i = 0$ 对所有的 i ($i = 1, 2, \dots, n$)不成立。当 $x_i = 0$ 或者 $y_i = 0$ 对任意的 $(i = 1, 2, \dots, n)$, 定义2.3的Consine相似度也不成立。考虑上述三种相似度的不足, 本章在定义2.4中定义一种新的相似度。

定义2.4 设 $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ 和 $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ 是实数集 R 上的 n 维矢量, 那么变系数相似度相似度定义如下:

$$\begin{aligned} S(X, Y) &= \alpha \frac{2XY}{\|X\|_2^2 + \|Y\|_2^2} + (1 - \alpha) \frac{XY}{\|X\|_2 \|Y\|_2} \\ &= \alpha \frac{2 \sum_{i=1}^n x_i y_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{i=1}^n y_i^2} + (1 - \alpha) \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}}, \end{aligned} \quad (2-4)$$

当 $\alpha = 0$ 时, 变系数相似度退化为E-相似度, 当 $\alpha = 1$ 时, 变系数相似度退化为C-相似度。在下面的讨论以及数值例子分析中, 可以看出定义2.4的合理性。

下面证明定义2.4中两矢量 X 和 Y 之间的变系数相似度满足 (1) 自反性; (2) 对称性; (3) 有界性, 见定理2.1。

定理 2.1. 设 $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ 和 $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ 是实数集 R 上的 n 维矢量, 两矢量间的相似度满足下面的性质:

(P1)自反性: 若 $X = Y$, 即: $x_i = y_i$, 对任意的 $i = 1, 2, \dots, n$, 那么 $S(X, Y) = 1$;

(P2)对称性: $S(X, Y) = S(Y, X)$;

(P3)有界性: $0 \leq S(X, Y) \leq 1$ 。

证明. (P1) 当 $X = Y$, 即: $x_i = y_i$, 对任意的 $i = 1, 2, \dots, n$, 有下面的等式

$$\begin{aligned} S(X, X) &= \alpha \frac{2XX}{\|X\|_2^2 + \|X\|_2^2} + (1 - \alpha) \frac{XX}{\|X\|_2 \|X\|_2} \\ &= \alpha \frac{2 \sum_{i=1}^n x_i x_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{i=1}^n x_i^2} + (1 - \alpha) \frac{\sum_{i=1}^n x_i x_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}} \\ &= \alpha + 1 - \alpha = 1. \end{aligned} \tag{2-5}$$

(P2) 下面的等式显然成立,

$$S(X, Y) = \alpha \frac{2XY}{\|X\|_2^2 + \|Y\|_2^2} + (1 - \alpha) \frac{XY}{\|X\|_2 \|Y\|_2} = S(Y, X).$$

(P3) $S(X, Y) \geq 0$ 显然成立, 因此, 只需要证明 $S(X, Y) \leq 1$.

由数学的基本不等式, 可得到

$$0 \leq \frac{2XY}{\|X\|_2^2 + \|Y\|_2^2} \leq 1, 0 \leq \frac{XY}{\|X\|_2 \|Y\|_2} \leq 1, \tag{2-6}$$

把(2.6)式代入(2.4)式, 得

$$S(X, Y) \leq \alpha + (1 - \alpha) = 1. \tag{2-7}$$

证毕。 □

2.3 几种不同相似度之间的比较

在这一节中, 我们用一些数值例子, 对2.2节给出的四种相似度模型进行比较。取18个矢量如表2-1所示, 理想矢量为 $V_p=(0.8542, 0.3460, 0.7000, 0.789, 0.1234, 0.6534)$ 。

分别取 $\alpha=0.1$ 、 $\alpha=0.5$ 、 $\alpha=0.75$ 和 $\alpha = 0.9$, 利用公式 (2.1) - (2.4) 计算出18个矢量 $V^i (i = 1, 2, \dots, 18)$ 与理想矢量 V_p 之间的J-相似度、E-相似度、C-相似度和S-相似度。为了更能直观的比较四种相似度, 利用Matlab画出相似度曲线如图 (2-1) - (2-4)。

在图 (2-1) 和 (2-3) 中, 当 $\alpha(\alpha = 0.1, \alpha = 0.5, \alpha = 0.75)$ 取不同的值时, 画出三种不同的相似度: Jcaard 相似度(J-similarity)、Dice相似度(E-similarity)和变系数相似度(S-similarity)。在图2-4中, 取 $\alpha=0.9$, 画出四种不同的相似度: Jcaard 相似度(J-similarity)、Dice相似度(E-similarity)、Consine 相似度 (C-similarity)和变系数相似度(S-similarity)。

在实际应用中C-相似度有一些缺陷, 它得到的决策结果与其他方法不同(我们在2.4节将详细的讨论C-相似度的不足和本文变系数相似度的优势), 这会使得决策者陷入困境, 无法选出最优方案。

表 2-1 6个群体成员的偏好矢量

成员	属性1	属性2	属性3	属性4	属性5	属性6
V^1	0.8452	0.9037	1.0000	1.0000	0.8003	0.9316
V^2	0.4410	0.6640	0.4722	0.6227	0.5933	0.6010
V^3	0.8613	0.7228	0.7569	0.3666	0.7118	0.9731
V^4	1.0000	0.0000	0.3151	0.1609	0.5933	0.0432
V^5	0.6810	0.9374	0.6152	0.8043	0.7031	1.0000
V^6	0.1113	1.0000	0.0000	0.1963	0.3100	0.5725
V^7	0.6206	0.7769	0.4711	0.5180	0.3172	0.4194
V^8	0.9055	0.9256	0.6170	0.8522	1.0000	0.7818
V^9	1.0000	0.8582	0.7363	0.8865	0.5421	0.8721
V^{10}	0.9786	0.7769	0.8008	0.7156	0.5039	0.4552
V^{11}	0.3351	0.2397	0.2104	0.2844	0.2282	0.2720
V^{12}	0.1273	0.6164	0.4122	0.3690	0.1098	0.4389
V^{13}	0.0000	0.2996	0.3252	0.4216	0.1683	0.2370
V^{14}	0.4397	0.4730	0.3241	0.3034	0.4352	0.6344
V^{15}	0.5536	0.6292	0.6152	0.6836	0.7534	0.8070
V^{16}	0.3338	0.0813	0.4122	0.1254	0.1098	0.6344
V^{17}	0.8311	0.8716	0.4711	0.6387	0.5933	0.6360
V^{18}	0.3847	0.8716	0.3316	0.3034	0.4352	0.6344

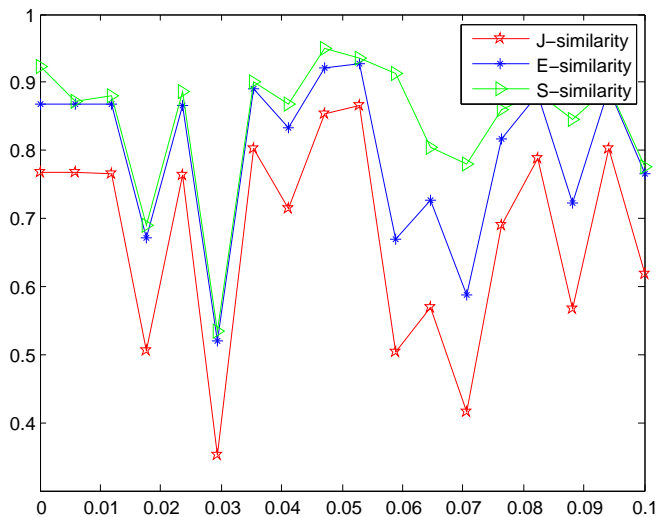


图 2-1 $\alpha=0.1$ 时的三种相似度曲线: J-相似度, E-相似度, S-相似度

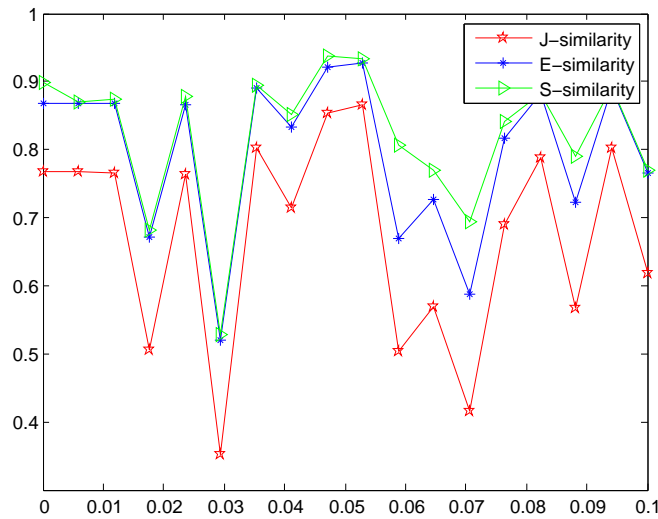


图 2-2 $\alpha=0.5$ 时的三种相似度曲线: J-相似度, E-相似度, S-相似度

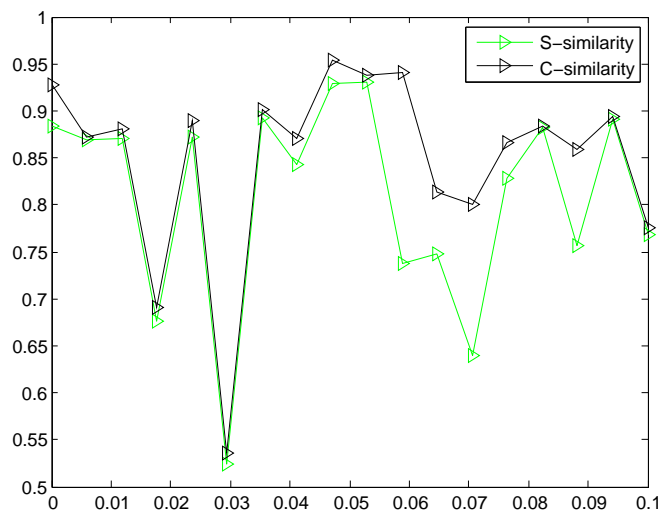


图 2-3 $\alpha=0.75$ 时的S-相似度和C-相似度曲线

2.4 变系数相似度在应急决策中的应用

2.4.1 决策问题描述

设某一决策问题有 p 个决策方案构成方案集 $A = \{A_1, A_2, \dots, A_p\}$, n 个决策属性 $C = \{C_1, C_2, \dots, C_n\}$, 决策者邀请 m 个专家构成决策群体记为 Ω , 对上述 p 个方案从 n 个属性进行评价, 考虑属性 C_j , 第 k 个专家对第 i 个方案的评价值为 v_{ij}^k , 并且 $v_{ij}^k \geq 0$ ($i = 1, 2, \dots, p; j = 1, 2, \dots, n; k = 1, 2, \dots, m$), 矢量 $V_i^k = (v_{i1}^k, v_{i2}^k, \dots, v_{in}^k)$ 称为群体 Ω 中第 k 个专家关于方案 A_i 的偏好矢量。

理想方案在现实生活中不容易实现, 但它是决策方案排序的有效工具, 本文的理想方案由决策者给出, 通过计算偏好矢量与理想方案的偏好矢量之间的加权变系数相似度来排列决策方案优劣, 从中选出最优方案。

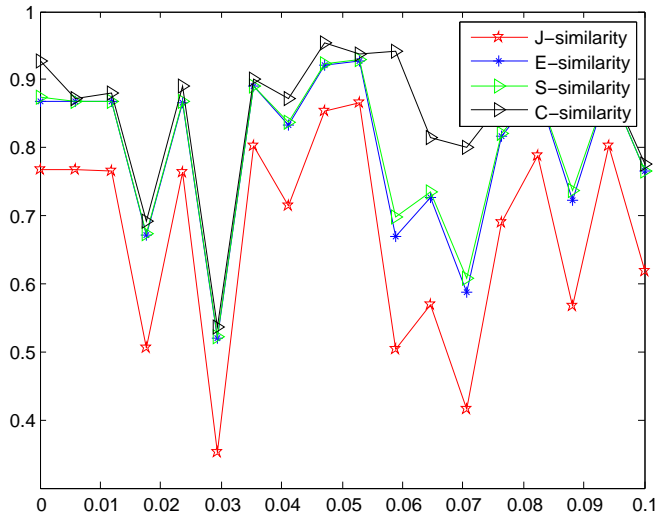


图 2-4 $\alpha=0.9$ 时的四种相似度曲线

2.4.2 应急决策案例分析

在本小节中，我们将讨论文献^[63]的应急决策案例，该案例是用来评估湖南省3个地级市（长沙、湘潭、株洲）的应急管理能力和。邀请6个专家（决策成员）从6个集结的一级指标（决策属性）对上述三个城市的应急管理能力和进行评价，得到6个专家的18个偏好矢量。6个一级指标（决策属性）简记为：(1) 属性1：抗冰救灾指挥部应急能力；(2) 属性2：气象部门监测与预警能力；(3) 属性3：居民应急反应能力；(4) 属性4：电力部门应急能力；(5) 属性5：运输管理部门应急能力；(6) 属性6：其他部门应急能力。

上述决策问题的决策步骤可概括如下：

步骤1 利用 (2-8) 式对文献^[63]的数据进行标准化处理，如表2-1所示。

$$Z_{ij} = \frac{y_j^{max} - y_{ij}}{y_j^{max} - y_j^{min}}, \quad (2-8)$$

三个评价对象（决策方案）对应的决策成员的偏好矢量如下：长沙市($V^1 - V^6$)、株洲市($V^7 - V^{12}$) 和湘潭市($V^{13} - V^{18}$)，如表2-1所示。

步骤2 决策者根据实际需要，制定了理想方案的偏好矢量为： $V_p=(0.8542, 0.346, 0.7, 0.789, 0.1234, 0.6534)$ 。取 $\alpha = 0.75$ ，利用 (2-1) - (2-4) 式可得到18个偏好矢量 V^i ($i = 1, 2, \dots, 18$)与理想方案的偏好矢量之间的相似度，如表2-2所示。

步骤3 利用表2-2的数据 ($V^i(i = 1, 2, \dots, 18)$)与理想方案偏好矢量之间的变系

表 2-2 18个偏好矢量与理想方案偏好矢量之间的四种相似度

成员	J-相似度	E-相似度	C-相似度	S-相似度
1	0.7671	0.8682	0.9283	0.8832
2	0.7671	0.8682	0.8728	0.8694
3	0.7661	0.8675	0.8812	0.8710
4	0.5051	0.6712	0.6911	0.6762
5	0.7628	0.8654	0.8898	0.8715
6	0.3512	0.5199	0.5355	0.5238
7	0.8015	0.8898	0.9008	0.8926
8	0.7140	0.8332	0.8713	0.8427
9	0.8530	0.9207	0.9542	0.9290
10	0.8660	0.9282	0.9372	0.9304
11	0.5040	0.6703	0.9411	0.7380
12	0.5700	0.7261	0.8141	0.7481
13	0.4152	0.5867	0.8003	0.6401
14	0.6898	0.8165	0.8655	0.8287
15	0.7892	0.8822	0.8843	0.8827
16	0.5663	0.7231	0.8591	0.7571
17	0.8029	0.8907	0.8937	0.8915
18	0.6191	0.7648	0.7762	0.7676

数相似度), 可以得到评价对象长沙市的矩阵 $T_1 = (t_{ij})_{6 \times 4}$:

$$T_1 = \begin{pmatrix} 0.7671 & 0.8682 & 0.9283 & 0.8832 \\ 0.7671 & 0.8682 & 0.8728 & 0.8694 \\ 0.7661 & 0.8675 & 0.8812 & 0.8710 \\ 0.5051 & 0.6712 & 0.6911 & 0.6762 \\ 0.7628 & 0.8654 & 0.8898 & 0.8715 \\ 0.3512 & 0.5199 & 0.5355 & 0.5238 \end{pmatrix},$$

评价对象株洲市的矩阵 $T_2 = (t_{ij})_{6 \times 4}$:

$$T_2 = \begin{pmatrix} 0.8015 & 0.8898 & 0.9008 & 0.8926 \\ 0.7140 & 0.8332 & 0.8713 & 0.8427 \\ 0.8530 & 0.9207 & 0.9542 & 0.9290 \\ 0.8660 & 0.9282 & 0.9372 & 0.9304 \\ 0.5040 & 0.6703 & 0.9411 & 0.7380 \\ 0.5700 & 0.7261 & 0.8141 & 0.7481 \end{pmatrix},$$

评价对象湘潭市的矩阵 $T_3 = (t_{ij})_{6 \times 4}$:

$$T_3 = \begin{pmatrix} 0.4152 & 0.5867 & 0.8003 & 0.6401 \\ 0.6898 & 0.8165 & 0.8655 & 0.8287 \\ 0.7892 & 0.8822 & 0.8843 & 0.8827 \\ 0.5663 & 0.7231 & 0.8591 & 0.7571 \\ 0.8029 & 0.8907 & 0.8937 & 0.8915 \\ 0.6191 & 0.7648 & 0.7762 & 0.7676 \end{pmatrix},$$

6个决策属性的权重^[63]为： $W=(0.162, 0.198, 0.201, 0.157, 0.174, 0.108)$ ，变系数加权相似度计算方法如下：

$$WS = WT. \tag{2-9}$$

步骤4 利用 (2-9) 式，可以得到四种相似度的决策结果，如表2-3所示。

表 2-3 $\alpha=0.75$ 时，四种相似度的决策结果

	WJ-相似度	WE-相似度	WC-相似度	WS-相似度
长沙市	0.6801	0.7990	0.8215	0.8046
株洲市	0.7279	0.8349	0.9091	0.8535
湘潭市	0.6579	0.7851	0.8530	0.8021
排序	$Z > C > X$	$Z > C > X$	$Z > X > C$	$Z > C > X$

从表2-3可以看出，本章方法的决策结果为：株洲市、长沙市、湘潭市，其中株洲市的应急管理最好，而且本章方法的结果与J-相似度和E-相似度的决策结果一致，但是C-相似度的决策结果与其他三种相似度决策结果不一致。为了更好的说明本章方法的优势，取 $\alpha = 0.25$ ，利用 (2-9) 式求出四种相似度的决策结果，如表2-4所示。

表 2-4 $\alpha = 0.25$ 时，四种相似度的决策结果

	WJ-相似度	WE-相似度	WC-相似度	WS-相似度
长沙市	0.6801	0.7990	0.8215	0.8360
株洲市	0.7279	0.8349	0.9091	0.8905
湘潭市	0.6579	0.7851	0.8530	0.8159
排序	$Z > C > X$	$Z > C > X$	$Z > X > C$	$Z > C > X$

从表2-3和表2-4中可以看出，加权J-相似度、加权E-相似度和加权变系数相似度的决策结果一致，最优方案为株洲市，而加权C-相似度决策结果与上述三种加权相似度的决策结果不一致，最优方案为长沙市，这会使得决策者陷入困境，无法选出最优方案。从图2-本章的变系数相似度相对C-相似度定义较为合理，因此本章方法无论从数值算例还是实际案例应用都有实用性。

2.5 本章小结

在这一章中,首先介绍了两矢量之间的J-相似度、E-相似度和C-相似度,分析了它们的缺陷,在它们基础上构造了变系数相似度模型,并证明变系数相似度满足自反性、对称性和有界性。

在2.4节,把本章的相似度模型以及现有的三种相似度模型应用到应急决策问题中,通过比较湖南省三个地级市(长沙市、株洲市、湘潭市)的重大冰雪应急管理能力,利用四种加权相似度公式,通过计算三个城市的评价矢量与理想方案的评价矢量之间的加权相似度,排列三个城市。不同的相似度的决策结果表明本章方法是有效的。同样,比较四种相似度的决策结果,从表2-3和表2-4中可以看出,加权J-相似度、加权E-相似度和加权变系数相似度的决策结果一致,而加权C-相似度决策结果与上述三种加权相似度的决策结果不一致。本章方法无论从数值算例还是实际案例应用都有实用性。

3 基于属性层次关系偏好的多属性大群体决策方法

3.1 决策问题研究背景

近年来,各种自然灾害频繁发生,造成了重大的经济损失、人员伤亡、物质损毁等,已成为人类生存与社会发展的一大全球性问题,而各种自然灾害的评估研究也是学术界一大热点。灾害发生后,迅速对其造成的危害程度进行评价,对于救灾的决策、组织、管理,以及灾后重建都起着十分重要的作用,是整个救灾管理系统中不可缺少的组成部分^[64]。各种自然灾害的评价模型有:评估洪水灾情等级的投影寻踪模型^[65]、地质灾害综合评估与区化模型^[66]、考虑地域经济差异的自然灾害灾情分析方法^[67]、应对自然灾害的应急资源布局模型^[68]等。现有灾害评价方法只针对某一自然灾害(洪水、地震、地质灾害),忽视自然灾害之间的联系,而我国气候多样,地质复杂、人口众多,突发的一种自然灾害会导致其他自然灾害发生,如汶川大地震后次生的地质灾害发生。自然灾害等级评估是涉及社会、经济、环境资源、区域人口4个子系统的复杂大系统评价问题,各个子系统的评价指标权重的合理确定是一难题。当前的评价指标权重通过专家打分获得,专家的偏好和价值取向的差异带来主观性问题,指标的划分和构成不明确,这些问题严重影响评估工作。

群决策方法是解决复杂大系统评价问题的一种有效方法,传统的群决策方法的特点是用定量化的方法处理决策人的价值判断,是自然科学与社会科学的交叉,群决策方法具有较强的理论性,同时又有很强的使用价值^[69]。一些好的群决策方法已经应用于自然灾害防御中,例如基于群决策的水资源可持续利用评价的理想区间法^[70]、多属性群体决策水文预报择优及组合方法^[71]。本章考虑现有自然灾害评估模型指标划分不全面未考虑评价指标的层次性,评价权重设计忽视其客观性的不足,利用多属性大群体决策方法,将指标分层分析,确定每一层的指标权重,逐层集结,得到评估结果,根据评估备择集,确定所评自然灾害的等级。

3.2 基于属性层次关系的属性权重确定方法

设某一评价对象,有 n 层评价指标,第 i 层有 n_i 个评价指标,将这 n_i 个评价指标从重要性最高到最低的标记为 $C_i^1, C_i^2, \dots, C_i^{n_i}$,则第 i 层 C_i^j 评价指标的权重的计算如下:

$$w_i^j = \sin\left(\frac{j}{n_i}\pi\right) + \cos\left(\frac{j}{n_i}\pi\right) + \sqrt{2}, \quad (3-1)$$

归一化得评价指标 C_i^j 的权重为:

$$\bar{w}_i^j = \frac{w_i^j}{\sum_{j=1}^{n_i} w_i^j}. \quad (3-2)$$

定理 3.1. 证明公式 (3-1) 和 (3-2) 式满足权重的定义, 并且由 w_i^j 定义的函数是减函数, 满足权重重要性递减, 其值也递减。

证明. 显然有 $\sum_{j=1}^{n_i} w_i^j = 1$, 下证 $w_i^j \geq 0$, 并且函数 w_i^j 是减函数。

$$\begin{aligned} w_i^j &= \sin\left(\frac{j}{n_i}\pi\right) + \cos\left(\frac{j}{n_i}\pi\right) + \sqrt{2} \\ &= \sqrt{2}\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(\frac{j}{n_i}\pi\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(\frac{j}{n_i}\pi\right)\right] + \sqrt{2} \\ &= \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{j}{n_i}\pi\right) + \sqrt{2}. \end{aligned} \quad (3-3)$$

由三角函数的定义可知:

$$-1 \leq \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{j}{n_i}\pi\right) \leq 1, \quad (3-4)$$

把 (3-4) 式代入 (3-1) 式, 可得 $w_i^j \geq 0$ 。因为 $\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{j}{n_i}\pi\right)$ 在区间 $[0, \pi]$ 上是减函数, 可知, 随权重重要性递减, 标记 j 的值增大, 由 (3-1) 式确定的权重值减少。

证毕。 □

3.3 基于属性层次关系的偏好矢量集结

设自然灾害评价体系中有 m 层指标, 每一层子评价指标相同, 其指标体系如下图所示:

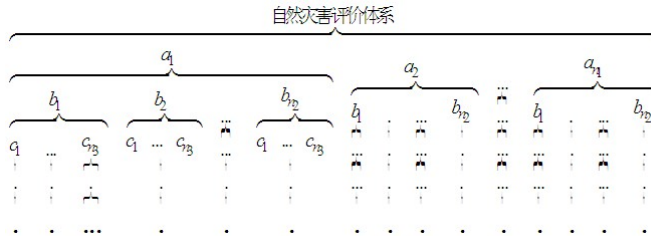


图 3-1 自然灾害等级评价体系

定义3.1 评价矢量. 设某一评价对象 a 有 n 个评价指标, 专家对每个评价指标进行评价, 得到的评价值为 v^j ($j = 1, 2, \dots, n$), 则称向量 $V^j = (v^1, v^2, \dots, v^n)$ 为评

价对象 a 的评价矢量。由 p 个评价对象的评价矢量构成的矩阵 $T' = [V^1, V^2, \dots, V^p]$ 称为其评价矢量矩阵。

设层次评价体系中有 m 层评价指标,第 i 子层有相同的 n_i 个的子评价指标,从最底层 m 层开始集结,第 m 层有 n_m 个评价指标,第 $m-1$ 层有 n_{m-1} 个评价指标,每一层评价指标可以看成下一层评价指标的评价对象,设第 $m-1$ 层第一个评价指标的评价矢量矩阵为:

$$T_{m-1}^1 = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n_{m-1}} \\ t_{21} & t_{22} & \dots & t_{2n_{m-1}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ t_{n_{m-1}1} & t_{n_{m-1}2} & \dots & t_{n_{m-1}n_{m-1}} \end{pmatrix},$$

则第 $m-2$ 层,第一个指标的评价矢量为:

$$\begin{aligned} V_{m-2}^1 &= W_m T_m^1 = (w_m^1, w_m^2, \dots, w_m^{n_m}) \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n_{m-1}} \\ t_{21} & t_{22} & \dots & t_{2n_{m-1}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ t_{n_{m-1}1} & t_{n_{m-1}2} & \dots & t_{n_{m-1}n_{m-1}} \end{pmatrix} \\ &= (v_{m-1}^{11}, v_{m-1}^{12}, \dots, v_{m-1}^{1n_{m-1}}). \end{aligned} \quad (3-5)$$

按照上述计算公式(3-5)式,可得第 $m-2$ 层 n_{m-2} 个指标的评价矢量,构成第 $m-2$ 层的评价矢量矩阵,依次下去集结得到各层的评价矢量矩阵。

3.4 基于属性层次关系的大群体应急决策方法

3.4.1 基于属性层次关系的评价模型的算法

设某一评价问题有 l 个评价对象,记为 $a^i (i = 1, 2, \dots, l)$,评价系统中有 m 层评价指标,每一层含有相同的子评价指标,建立等级评价模型的过程有如下七个步骤:

步骤1 将 l 个评价对象的各层评价指标值汇总得到的评价矢量表,做非线性变换:

$$Z_{ij} = \frac{v^{ij} - \bar{v}^j}{\text{Max}(v^j) - \bar{v}^j} (1.00 - \beta) + \beta \quad (3-6)$$

其中 $i = 1, 2, \dots, l; j = 1, 2, \dots, \sum_{k=1}^m n_k$, $\bar{v}^j = \frac{1}{\sum_{k=1}^m n_k} \sum_{i=1}^m v_{ij}$ 。 β 是设定的评价值的均值^[72], β 的取值可在 $0.5 \sim 0.75$ 之间。

步骤2 计算第 k 层指标权重。首先将 n_k 个指标按照重要性由大到小排列,第一个指标最重要,利用公式(3-1)和(3-2)计算得权重矢量为: $\bar{W}_k = (w_k^1, w_k^2, \dots, w_k^{n_k})$ 。将 k 取遍所有指标层数,即可得到各层的指标权重矢量。

步骤3 评价矢量集结。初始化评价对象标记值 $i = 1, k = m$, 从最底层 m 层开始集结, 求出第 $m - 1$ 层 n_{m-1} 个评价矢量矩阵为 T_k^r ($i = 1, 2, \dots, n_{m-1}$), 按照上述计算公式 (3-5) 式, 可得第 $m-2$ 层 n_{m-2} 个评价指标指标的评价矢量矩阵。取 $k = m - 1$, 循环下去直至 $k = 0$ 结束, 可求得 $m - 2, m - 3, \dots, 2$ 层的评价矢量矩阵。

步骤4 由步骤3, 根据计算公式 (3-5), 求得第二层的评价矢量矩阵为:

$$T_2 = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n_1} \\ t_{21} & t_{22} & \dots & t_{2n_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ t_{n_21} & t_{n_22} & \dots & t_{n_2n_1} \end{pmatrix},$$

那么第一层的评价矢量为:

$$\begin{aligned} V_1 = W_2 T_2 &= (w_2^1, w_2^2, \dots, w_2^{n_2}) \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n_1} \\ t_{21} & t_{22} & \dots & t_{2n_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ t_{n_21} & t_{n_22} & \dots & t_{n_2n_1} \end{pmatrix} \\ &= (v_1^1, v_1^2, \dots, v_1^{n_1}). \end{aligned}$$

则评价对象 a_1 的评价结果为:

$$o_1 = W_1 (V_1)' = (w_1^1, w_1^2, \dots, w_1^{n_1}) \begin{pmatrix} v_1^1 \\ v_1^2 \\ \dots \\ v_1^{n_1} \end{pmatrix} \quad (3-7)$$

步骤5 令 $i = i + 1$, 执行步骤3-步骤4, 直至 $i > l$ 结束, 可得到 l 个评价对象的评价结果 o_1, o_2, \dots, o_l , 构成向量 $O = (o_1, o_2, \dots, o_l)$ 这里 $0 \leq o_i \leq 1$, 若其中有一个 $o_i > 1$, 将向量 O 标准化。

步骤6 建立评估备择集为: $\Delta = \{\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_r\}$, 若判定对象值 $\frac{r-1}{r} \leq o_i \leq \frac{r-2}{r}$, 则其评价等级属于备择集 Δ_2 , 评价对象对应的等级如表3-1。

表 3-1 评价等级划分

等级	1	2	...	i	$i + 1$...	r
区间值	$(1, \frac{r-1}{r})$	$(\frac{r-1}{r}, \frac{r-2}{r})$...	$(\frac{r-i+1}{r}, \frac{r-i}{r})$	$(\frac{r-i}{r}, \frac{r-i-1}{r})$...	$(\frac{r-i}{r}, \frac{1}{0})$
备择集	Δ_1	Δ_2	...	Δ_i	Δ_{i+1}	...	Δ_r

步骤7 根据 o_i 值的大小判定所属区间, 并以此判断所评价对象的等级。

3.4.2 自然灾害等级评价实例分析及结论

以中国环境统计年鉴2010中, 全国历年自然灾害情况(2002-2009年的数据, 见表3-2和表3-3)为例, 评估历年自然灾害的等级。在该决策问题中有两层评价指标, 第一层为{地质灾害、地震灾害、海洋灾害、森林火灾}, 第二层指标为{灾害次数、人员伤亡、直接经济损失}, 8个评价对象{2002、2003、2004、2005、2006、2007、2008、2009}。

表 3-2 全国历年自然灾害情况(2002年-2009年)

年 份	地质灾害			地震灾害		
	灾害次数 (次)	人员伤亡 (人)	直接经济损失 (万元)	灾害次数 (次)	人员伤亡 (人)	直接经济损失 (万元)
2002	40246	2759	509740	5	362	13100
2003	15489	1333	504325	21	7465	466040
2004	13555	1407	408828	11	696	94959
2005	17751	1223	357678	13	882	262811
2006	102804	1227	431590	10	7229	79962
2007	25364	1123	247528	3	422	201922
2008	26580	1598	326936	17	446293	85949594
2009	10580	845	190109	8	407	273782

表 3-3 续表-全国历年自然灾害情况(2002年-2009年)

年 份	海洋灾害			森林灾害		
	灾害次数 (次)	死亡失踪人数 (人)	直接经济损失 (亿元)	灾害次数 (次)	人员伤亡 (人)	其它损失折款 (万元)
2002	126	124	65.9	7527	98	3610
2003	172	128	80.5	10463	142	37000
2004	155	140	54.2	13466	252	20213
2005	176	371	332.4	11542	152	15029
2006	180	492	218.5	8170	102	5375
2007	163	161	88.4	3	94	12416
2008	128	152	206.1	14144	174	12594
2009	132	95	100.2	8859	110	14511

步骤1 首先将表3-2和表3-3中的原始数据, 按照公式(3-6), 取 $\beta=0.6$, 做非线性变换, 得表3-4,如下:

表 3-4 自然灾害评价矢量

被评 年份	地质灾害			地震灾害			海洋灾害			森林火灾		
	灾害 次数	人员 伤亡	经济 损失	灾害 次数	人员 伤亡	经济 损失	灾害 次数	人员 伤亡	经济 损失	灾害 次数	人员 伤亡	经济 损失
2002	0.648	1.000	1.000	0.36	0.541	0.541	0.169	0.481	0.436	0.287	0.447	0.354
2003	0.509	0.567	0.984	1.00	0.549	0.544	0.876	0.487	0.467	0.603	0.605	1.000
2004	0.499	0.590	0.706	0.60	0.542	0.542	0.615	0.504	0.411	0.927	1.000	0.675
2005	0.522	0.534	0.558	0.68	0.542	0.543	0.938	0.829	1.000	0.719	0.641	0.575
2006	1.000	0.535	0.772	0.56	0.541	0.542	1.000	1.000	0.759	0.356	0.461	0.575
2007	0.565	0.504	0.238	0.28	0.541	0.542	0.738	0.534	0.483	0.474	0.433	0.524
2008	0.572	0.648	0.468	0.84	1.000	1.000	0.200	0.521	0.732	1.000	0.720	0.528
2009	0.482	0.419	0.071	0.48	0.541	0.543	0.261	0.441	0.508	0.431	0.490	0.565

步骤2 将第二层指标按照重要性排序依次为：人员伤亡、经济损失、灾害次数，由公式 (3-1) 式和 (3-2) 式，计算权重为： $w_p=0.5991$ ， $w_e=0.3252$ ， $w_t=0.0757$ 。那么第二层指标的权重矢量为： $W_2=(0.3252,0.0757, 0.5991)$ ；将第一层指标按重要性排序为：地震灾害、地质灾害、海洋灾害、森林火灾，由公式 (3-1) 式和 (3-2) 式，计算权重为： $w_{zh}=0.4000$ 、 $w_z=0.3414$ 、 $w_h=0.2000$ 、 $w_s=0.0586$ 。那么第一层指标的权重矢量为： $W_1=(0.3414, 0.4000, 0.2000, 0.0586)$ 。

步骤3 第二层评价指标的评价矢量矩阵为：

$$T_2 = \begin{pmatrix} 0.648 & 0.360 & 0.169 & 0.287 \\ 1.000 & 0.541 & 0.481 & 0.447 \\ 1.000 & 0.541 & 0.436 & 0.354 \end{pmatrix},$$

步骤4 那么2003年第一层评价指标的评价矢量为：

$$\begin{aligned} V_{2003} &= W_2 T_2 = (0.3252, 0.0757, 0.5991) \begin{pmatrix} 0.648 & 0.360 & 0.169 & 0.287 \\ 1.000 & 0.541 & 0.481 & 0.447 \\ 1.000 & 0.541 & 0.436 & 0.354 \end{pmatrix} \\ &= (0.9734, 0.5281, 0.4310, 0.3799). \end{aligned}$$

步骤5 按照上述计算方法，可集结得到2004-2009年的评价矢量，构成一评价矢量矩阵记为 T ，则：

$$T = \begin{pmatrix} 0.9734 & 0.8129 & 0.6532 & 0.5477 & 0.7129 & 0.3493 & 0.5349 & 0.2157 \\ 0.5281 & 0.5803 & 0.5466 & 0.5532 & 0.5434 & 0.5226 & 0.9879 & 0.5380 \\ 0.4310 & 0.5048 & 0.4572 & 0.9400 & 0.8557 & 0.5195 & 0.6237 & 0.4681 \\ 0.3799 & 0.8417 & 0.8001 & 0.6078 & 0.5219 & 0.4912 & 0.6265 & 0.5309 \end{pmatrix},$$

则评价结果为:

$$O = W_1T = (0.3414, 0.4000, 0.2000, 0.0586)$$

$$\begin{pmatrix} 0.9734 & 0.8129 & 0.6532 & 0.5477 & 0.7129 & 0.3493 & 0.5349 & 0.2157 \\ 0.5281 & 0.5803 & 0.5466 & 0.5532 & 0.5434 & 0.5226 & 0.9879 & 0.5380 \\ 0.4310 & 0.5048 & 0.4572 & 0.9400 & 0.8557 & 0.5195 & 0.6237 & 0.4681 \\ 0.3799 & 0.8417 & 0.8001 & 0.6078 & 0.5219 & 0.4912 & 0.6265 & 0.5309 \end{pmatrix}$$

$$= (0.6520, 0.6600, 0.5799, 0.6319, 0.6625, 0.4610, 0.7392, 0.4236).$$

步骤6 建立备择集 $\Delta = \{\text{特大灾害, 重大灾害, 大灾害, 中灾害, 小灾害, 微灾害}\}$ 评价标准如表3-5。

表 3-5 2002-2009自然灾害等级评价结果

等级	1	2	3	4	5	6
区间值	(1, 0.83)	(0.83, 0.67)	(0.67, 0.5)	(0.5, 0.33)	(0.33, 0.17)	(0.17, 0)
备择集	特大灾害	重大灾害	大灾害	中灾害	小灾害	微灾害

步骤7 根据表3-5, 从 O 中分量可以看出08年属于重大灾害年, 02年、03年、04年、05年和06年属于大灾害年, 07年和09年属于中灾害年。

3.5 本章小结

自然灾害评估是应急管理系统中重要组成部分, 本章讨论了属性层次关系偏好下的大群体决策方法在自然灾害等级评价模型中的应用, 首先简单的介绍了近几十年自然灾害等级评价模型的研究现状, 以及群决策方法在复杂等级评价问题中的应用。揭示了等级评价模型中指标具有层次性的关联, 以及现有的等级评价模型权重设计由专家打分确定, 未考虑专家之间的经验、学历、教育背景等差异引起的主观性。针对上述问题, 提出了由三角函数确定权重大小, 既考虑了权重之间的层次性, 又能客观地给出各层次的权重值, 并由定理3.1证明了其满足权重函数的性质, 随着权重重要性降低其权重值也降低。利用群决策方法中矢量集结算子, 考虑评价指标的层次性, 提出了基于层次关系的评价矢量集结方法, 并在此基础上构造了自然灾害等级评价算法。最后, 利用属性层次偏好下的决策方法对2002-2009年全国自然灾害的数据, 按年份划分等级, 评价结果为: 08年属于重大灾害年, 02年、03年、04年、05年和06年属于大灾害年, 07年和09年属于中灾害年, 与实际结果一致。该数值结果表明本章基于属性层次偏好的大群体决策方法是有效的。

4 基于属性二元关系偏好的多属性大群体决策方法

二元关系的研究历史悠久,二元关系的现代研究起源于De Morgan,是模糊数学中一个已经形成的很重要的分支^[73]。近几年,二元关系以及二元关系矩阵(0-1矩阵或布尔矩阵),广泛应用于工程、经济管理等诸多领域^[74]、^[75]。文献^[76]引入了非劣效性的二元关系,并以此为基础构建了决策方案排序算法。网络环境下群体决策支持系统成为支持群决策的有效手段^[77],在此基础上大群体决策问题就成为关键问题,而对决策成员的决策结果有效的聚类,是分析以及完成大群体决策的基础。传统的聚类方法没有考虑属性间的关联,决策群体中的决策成员较少,对于复杂大群体决策问题适用性不强。针对现有文献的不足,本章考虑决策属性间二元关系,以此构建两个矢量的相似度模型,提出基于属性二元关系的聚类方法,并在聚类结果上构造基于属性二元关系偏好的多属性大群体决策方法。

在下面的几节中,介绍属性二元关系偏好下多属性大群体决策问题的研究背景,给出基于属性二元关系的偏好矢量间的相似度,在该相似度模型基础上,提出基于属性二元关系的大群体聚类算法。通过数值例子讨论该聚类方法的有效性,并与现有的聚类方法作比较,同时给出基于属性二元关系的属性权重确定方法和决策方案排序方法,最后把本章的方法应用到应急决策问题中,案例结果表明本章的方法是可行的。

4.1 决策问题研究背景

近年来,我国部分地区接连遭遇罕见的自然灾害,如暴雨雪天气、干旱、泥石流和洪涝灾害等,经济损失达数千亿元,因此中国已处于各种灾害的高风险之中。重大灾害应急决策环境越来越复杂,决策者面临的不确定因素日益增多,各因素之间的关系呈现复杂的关联性,所承受的决策风险愈来愈大^[78]。因此对灾害应急能力评价和应急管理是政府以及学术界研究的重大课题之一,以洪水灾害为例,其应急能力评价是根据洪水灾害评价指标体系,采用适合的模型进行综合评价,评价结果对提高应急管理水平具有重要实际意义^[79],也给应急决策提供科学依据。目前对灾害及应急决策评价的各单项指标(可与决策属性对应)多为相互独立互不影响,即存在不相容性^[65],忽略了指标之间的关系,换句话说灾害及应急能力评价的各单项指标存在关联性(多为非线性关系)。传统的属性(评价指标)间关联的多属性群决策(MADM)理论主要有:属性间存在可消除关联的单层MADM理论^{[80]-[82]}、属性间存在不可消除关联的单层MADM理论^{[83]-[85]}及基于属性间关联的层次MADM理论^[86]。解决属性间关联

的多属性决策问题, 章玲^[87]提出了关联加权平均方法、关联现行分配方法、关联ELECTRE方法和有序Sugen方法。但决策成员增多时, 上述方法计算过于复杂, 不适用于大群体应急决策问题。

针对现有的大群体决策方法只考虑决策属性相互独立的不足, 本章提出了一种基于属性二元关系偏好的大群体决策方法, 该方法基于二元关系形成群体成员偏好矢量属性关系矩阵, 借助该关系矩阵是0-1矩阵及其范数性质, 构建了两个决策成员偏好矢量相似度模型, 基于该模型提出了一种大群体决策聚类方法和决策方案排序方法, 并将本章方法与其他文献中聚类方法进行比较, 数值结果表明本章方法是有效的。最后以湖南省重大冰雪灾害应急管理评价为案例, 对本章方法进行了应用。

4.2 基于属性二元关系的偏好矢量间相似度

首先, 给出两矢量之间的相似度定义。

定义4.1 设 $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ 和 $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ 是实数集 R 上的两个 n 维矢量, 且所有分量都是正实数, 如果 $S(X, Y)$ 满足下面的性质, 则称 $S(X, Y)$ 是两个矢量 X 和 Y 之间的相似度。

$$(P1) \quad 0 \leq S(X, Y) \leq 1; \quad (4-1)$$

$$(P2) \quad X = Y, \quad x_i = y_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad S(X, Y) = 1; \quad (4-2)$$

$$(P3) \quad S(X, Y) = S(Y, X). \quad (4-3)$$

设 Q 是矢量 X 上的二元关系, 由隶属函数 $Q(x_1, x_2)$ 来定义, $Q(x_1, x_2)$ 是 $X \times X \rightarrow [0, 1]$ 上的一一映射, 其中 $Q(x_1, x_2)$ 的值表示元素 x_1 和 x_2 满足二元关系的程度。对任意的 $1 \leq i, j \leq n$, 称 $T(Q) = (t_{ij})_{n \times n}$ 为矢量 X 满足二元关系 Q 的关系矩阵, 其中 $t_{ij} = 1$, 当且仅当 $(x_i, x_j) \in Q$, 否则 $t_{ij} = 0$, 显然该关系矩阵 $T(Q)$ 是0-1矩阵。例如矢量 $X = (0.2, 0.4, 0.8)$, 当二元关系 Q 描述成 x_i 和 x_j ($i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3$)之和不小于1, 那么矢量 X 基于二元关系 Q 的关系矩阵为:

$$T(Q) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

定义 4.2 两个关系矩阵的加法定义如下:

$$T(Q_1) \oplus T(Q_2) = T(\text{Max}(t_{i_1j_1}, t_{i_2j_2}))_{n \times n}. \quad (4-4)$$

定义 4.3 设 Q 是矢量 X_i 和 X_j 上的二元关系, 其对应的关系矩阵分别为 $T_i(Q)$ 和 $T_j(Q)$, 利用关系矩阵的范数定义两个矢量之间的相似度为:

$$S_{ij}(X_i, X_j) = \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\|T_i + T_j\|_2}{\|T_i\|_\infty + \|T_j\|_\infty}, \quad (4-5)$$

其中,

$$\|T\|_2 = (\rho(T'T))^{1/2}, \quad \|T_i\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{j=1}^n |t_{ij}|$$

$\rho(T'T)$ 是矩阵 $T'T$ 的谱半径, 即矩阵 $T'T$ 特征值中绝对值最大者。

定理 4.1. 对于定义4.3中两个矢量 X_i 和 X_j 基于二元关系 Q 的相似度, 满足定义4.1中的性质, 是两个矢量之间的相似度。

证明. (P1) 由于 $S_{ij}(X_i, X_j) \geq 0$ 显然成立, 下证 $S_{ij}(X_i, X_j) \leq 1$ 。

由矩阵范数的性质得:

$$\|T\|_2 \leq \sqrt{n} \|T\|_\infty, \quad \|T_1 + T_2\|_2 \leq \|T_1\|_2 + \|T_2\|_2, \quad (4-6)$$

把(4-6)式代入(4-5)式得:

$$\begin{aligned} S_{ij}(X_i, X_j) &= \frac{1}{\sqrt{n}} \times \frac{\|T_i + T_j\|_2}{\|T_i\|_\infty + \|T_j\|_\infty} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \times \frac{\|T_i\|_2 + \|T_j\|_2}{\|T_i\|_\infty + \|T_j\|_\infty} \\ &\leq \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}} \times \frac{\|T_i\|_\infty + \|T_j\|_\infty}{\|T_i\|_\infty + \|T_j\|_\infty} \leq 1. \end{aligned}$$

(P2) 因为关系矩阵是0-1矩阵, 可得 $\|T\|_2 = \sqrt{n} \|T\|_\infty$, 则:

$$S_{ij}(X_i, X_i) = \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\|T_i + T_i\|_2}{\|T_i\|_\infty + \|T_i\|_\infty} = \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{2\sqrt{n}\|T_i\|_\infty}{2\|T_i\|_\infty} = 1.$$

(P3)显然有:

$$S_{ij}(X_i, X_j) = \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\|T_i + T_j\|_2}{\|T_i\|_\infty + \|T_j\|_\infty} = S_{ji}(X_j, X_i)$$

成立。证毕。 □

4.3 基于属性二元关系的大群体聚类算法

设某一决策问题有 p 个决策方案构成方案集 $A = \{A_1, A_2, \dots, A_p\}$, n 个决策属性 $C = \{C_1, C_2, \dots, C_n\}$, 决策者邀请 m 个专家构成决策群体记为 Ω , 对上述 p 个方案从 n 个属性进行评价, 第 i 个专家对第 l 个方案的评价值为 v_j^i , 并且 $v_j^i \geq 0$ ($i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$), 矢量 $V^i = (v_1^i, v_2^i, \dots, v_n^i)$ 称为群体 Ω 中第 i 个专家的偏好矢量。

定义 4.4: 属性关系矩阵. 对于群体中第 i 个决策成员(专家)的偏好矢量 V^i , 设 Q 为 n 元偏好矢量 $V^i = (v_1^i, v_2^i, \dots, v_n^i)$ 上的属性二元关系, 对任意的 $0 \leq j_1, j_2 \leq 1$, 称 $T^i(Q) = (t_{j_1 j_2}^i)_{n \times n}$ 为决策成员 i 的基于属性二元关系 Q 的属

性关系矩阵, 其中 $t_{j_1 j_2}^i = 1$, 当且仅当 $(v_{j_1}^i, v_{j_2}^i) \in Q$, 即成员偏好矢量分量 $v_{j_1}^i, v_{j_2}^i$ 满足属性二元关系 Q , 否则 $t_{j_1 j_2}^i = 0$, 显然该关系矩阵 $T^i(Q)$ 是0-1矩阵。

考虑决策属性间的二元关系, 对于两个决策成员偏好相似度, 由定义4.3给出。决策成员偏好矢量聚类方法主要包括两个主体算法: 决策成员偏好矢量形成属性关系矩阵 T^i 的算法和基于二元关系 Q 的相似度模型(4-5)的群体成员偏好矢量聚类算法。

4.3.1 属性关系矩阵 $T = \{T^i\}$ 形成

决策成员期望偏好矢量 V^i 形成属性关系矩阵 $T = \{T^i\}$ 的过程如下:

步骤1: 把群体 Ω 中所有成员的偏好矢量构成一个集合, 记为 Ψ , 并对其中的偏好矢量标记为 $1 \sim m$, 顺序取每个偏好矢量 V^i 。

步骤2: 设置二元关系 Q 。

步骤3: 初始化偏好矢量顺序号 $i=1$ 。

步骤4: 从 Ψ 中按顺序选取偏好矢量 $V^i = (v_1^i, v_2^i, \dots, v_n^i)$, $V^i \in \Psi$, 同时设置集合 T 。

步骤5: 从 Ψ 中按顺序选取偏好矢量 V^i 。若 $(v_{j_1}^i, v_{j_2}^i) \in Q$, 即属性值之间满足二元关系 Q , 则 $t_{j_1 j_2}^i = 1$, 否则 $t_{j_1 j_2}^i = 0$, ($j_1, j_2=1, 2, \dots, n$)。形成关系矩阵 $T^i(Q) = (t_{j_1 j_2}^i)_{n \times n}$, 把关系矩阵 $T^i(Q)$ 放入集合 T 中, 同时从 Ψ 中删除 V^i 。

步骤6: 如果 Ψ 是非空的, 那么从 Ψ 中选取下一个偏好矢量 V^i ($i = i + 1$), 这里 $V^i \in \Psi$, 转入步骤5; 如果 Ψ 是空的, 转入步骤7。

步骤7: 输出决策成员偏好矢量属性关系矩阵集合 $T = \{T^i\}$, 转入下列基于 Q 的相似度模型(4-5)的成员偏好矢量聚类算法。

4.3.2 基于二元关系 Q 的决策成员偏好矢量聚类

引入阈值 γ , 用于区别偏好矢量 V^i 与 V^j 之间的相似程度, 即表示两个决策成员间的偏好接近程度。若 $r_{ij}(V^i, V^j) \geq \gamma$, 说明两个偏好矢量 V^i 与 V^j 之间的相似度大于或等于 γ , 两个决策成员之间的偏好接近程度大, 即: 决策意见差异较小。阈值 γ 也称为群体中决策成员的资格参数, 用于确定一个决策成员是否可以被包含在一个聚集中, 在实际聚类中, 阈值一般在(0.5,1)取值^[14]。基于上述偏好矢量相似度模型(4-5), 对所有成员属性关系矩阵 $T = \{T^1, T^2, \dots, T^m\}$ 进行聚类^[88], 形成 K ($0 \leq K \leq 1$)个聚集并构成聚集结构, 若 n_k 是属于第 k 个聚集的偏好矢量个数, 则 $\sum_{k=1}^K n_k = m$, 聚集 C^k 中决策成员的偏好相对接近。

对于第 k 个聚集 C^k , 通过其成员的偏好矢量计算该聚集的偏好矢量。首先计算

$$h^k = \sum_{V^i \in C^k} V^i, \quad (4-7)$$

标准化得聚集 C^k 的偏好矢量, 如下:

$$H^k = \frac{h^k}{|h^k|}, \quad (4-8)$$

其中 $|h^k|$ 是聚集 C^k 偏好矢量的模长, 那么整个大群体 Ω 的偏好矢量为:

$$U = \frac{u}{|u|}, \quad (4-9)$$

这里, $u = \sum_{k=1}^K \frac{n_k}{m} H^k$, 其中 $|u|$ 是群体 Ω 的偏好矢量的模长。

4.4 聚类算例及算例结果的比较

本节给出一组实验数据来验证上一节聚类方法的有效性, 某省要对本省自然灾害风险进行决策, 该问题存在4个决策属性(评判准则), 简单记为属性1、属性2、属性3、属性4, 现聘请20个决策专家构成决策群体 Ω , 每个专家成员分别就这4个属性对该问题进行评价, 可得到20个偏好矢量, 记为 $\Psi = \{V^i | i = 1, 2, \dots, 20\}$, 如表4-1所示。

表 4-1 20个专家偏好矢量表

成员	属性1	属性2	属性3	属性4	成员	属性1	属性2	属性3	属性4
1	0.3975	0.3800	0.5243	0.5732	11	0.4567	0.5327	0.4967	0.6143
2	0.5364	0.5090	0.3232	0.5617	12	0.3030	0.3938	0.6512	0.5177
3	0.5357	0.5236	0.3815	0.4907	13	0.5156	0.6112	0.4988	0.4183
4	0.4807	0.6170	0.5691	0.6265	14	0.6950	0.5679	0.5799	0.4021
5	0.5620	0.4769	0.5944	0.4346	15	0.6709	0.5610	0.6421	0.5079
6	0.3673	0.4469	0.3959	0.5792	16	0.5593	0.5792	0.5672	0.5562
7	0.6965	0.4169	0.4874	0.6065	17	0.4885	0.4941	0.4807	0.2552
8	0.4687	0.5166	0.5863	0.3979	18	0.3537	0.4247	0.4193	0.7412
9	0.5426	0.5009	0.4187	0.5696	19	0.4086	0.5737	0.4689	0.5231
10	0.5127	0.3999	0.6237	0.3749	20	0.5658	0.4382	0.5048	0.5707

4.4.1 基于不同二元关系 Q 的算例结果比较

在实际决策问题中, 对于属性间的二元关系, 可以通过分析以往的历史数据, 用概率分布函数求得, 也可以由决策者根据实际决策目标、专家意见来制定, 本节给出一组实验数据, 为了便于说明问题, 本节的二元关系是模拟的。

(1) 对于决策属性之间的二元关系 Q_1 , 用数学语言描述为: $x_i + x_j \geq 1.2$, $(x_i, x_j) \in Q_1$, 即决策属性间二元关系是专家对两个决策属性的评价

值之和不小于1.2。按照上述给出的二元关系，按照4.2.1节属性关系矩阵形成算法，可得到20个专家的属性关系矩阵，把20个专家属性矩阵集合记为 $T = \{T^1, T^2, \dots, T^{20}\}$ 。例如专家1，专家2和专家4的属性关系矩阵为：

$$T^1(Q_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, T^2(Q_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$T^4(Q_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

取聚类阈值 $\gamma=0.75$ ，对上述20个决策专家属性矩阵集合记为 $T = \{T^1, T^2, \dots, T^{20}\}$ 执行4.3.2节聚类算法^[88]，可得聚集数 $K=4$ ，算法执行结果如表4-2所示。

表 4-2 基于二元关系 Q_1 ， $\gamma=0.75$ 时的聚类算法执行结果

聚集	成员数	成员
聚集 C^1	13	$V^1, V^4, V^5, V^6, V^7, V^8, V^9, V^{11}, V^{16}, V^{17}, V^{18}, V^{19}, V^{20}$
聚集 C^2	4	$V^2, V^{10}, V^{12}, V^{15}$
聚集 C^3	2	V^3, V^{13}
聚集 C^4	1	V^{14}

如：由(4-5)式可得专家1和专家2的偏好矢量相似度 $r_{12}(V^1, V^2) = 0 < 0.75$ ，专家2被放入临时集合，而专家1和专家4的期望偏好矢量相似度 $r_{14}(V^1, V^4) = 1 > 0.75$ ，这说明专家1和专家4偏好相似，分到集合 C^1 。

取阈值 $\gamma = 0.9$ ，得聚集数 $K=7$ ，算法执行结果如表4-3所示。

表 4-3 基于二元关系 Q_1 ， $\gamma=0.9$ 时的聚类算法执行结果

聚集	成员数	成员
聚集 C^1	10	$V^1, V^4, V^5, V^6, V^8, V^9, V^{16}, V^{17}, V^{19}, V^{20}$
聚集 C^2	2	V^2, V^7
聚集 C^3	3	V^3, V^{10}, V^{12}
聚集 C^4	2	V^{11}, V^{18}
聚集 C^5	1	V^{13}
聚集 C^6	1	V^{14}
聚集 C^7	1	V^{15}

(2) 对于决策属性之间的二元关系 Q_2 ，用数学语言描述为： $\log(x_i + x_j) \geq 0.1$ ， $(x_i, x_j) \in Q_2$ ，即决策属性的二元关系是专家对两个决策属性的评价值之和的对数不小于0.1。取阈值 $\gamma = 0.75$ ，得聚集数 $K=7$ ，算法执行结果如表4-4所示。

表 4-4 基于二元关系 Q_2 ， $\gamma=0.75$ 时的聚类算法执行结果

聚集	成员数	成员
聚集 C^1	10	$V^1, V^2, V^3, V^6, V^9, V^{17}, V^{18}, V^{19}, V^{20}$
聚集 C^2	2	V^4, V^{15}
聚集 C^3	4	V^5, V^8, V^{10}, V^{14}
聚集 C^4	1	V^7
聚集 C^5	1	V^{11}
聚集 C^6	1	V^{12}
聚集 C^7	1	V^{13}

取阈值 $\gamma = 0.9$ ，得聚集数 $K=14$ ，算法执行结果如表4-5所示。

表 4-5 基于二元关系 Q_2 ， $\gamma=0.9$ 时的聚类算法执行结果

聚集	成员数	成员
聚集 C^1	5	V^1, V^2, V^3, V^6, V^7
聚集 C^2	1	V^4
聚集 C^3	3	V^5, V^{14}, V^{16}
聚集 C^4	1	V^7
聚集 C^5	1	V^8
聚集 C^6	1	V^9
聚集 C^7	1	V^{10}
聚集 C^1	1	V^{11}
聚集 C^2	1	V^{12}
聚集 C^3	1	V^{13}
聚集 C^4	1	V^{15}
聚集 C^5	1	V^{18}
聚集 C^6	1	V^{19}
聚集 C^7	1	V^{20}

从表(4-2) - (4-5)可以看出，不同的二元关系 Q ，取相同的阈值，可以得到不同的聚类结构；相同的二元关系 Q ，取不同的阈值，也可以得到不同的聚类结构，这使得决策者可以根据决策问题的实际需要，选取合适的聚类结构。换句话说，决策者在聚类过程中，可通过调整二元关系 Q ，阈值大小，找到满足实际要求的聚类结构，解决复杂大群体决策问题，选取最优决策方案。

4.4.2 不同的聚类方法的算例结果比较

本节的方法适用于复杂大群体聚类，为了便于与其他的聚类方法比较，引入一致性指标和离散度。一致性指标^[88]是衡量聚类后群体意见一致性的重要量度，而离散度与一致性指标是对等的，一致性指标越高，该聚类方法越有效。

定义 4.5: 聚集一致性^[88]. 对于群体 Ω 中任何聚集（实际上是一个同类子群体），可定义其一致性指标。第 i 个聚集 C^i （其所包含的决策成员至少有一个，这样聚类才有效）的一致性指标 ρ^i 为：

$$\rho^i = \frac{1}{C_{n_i}^2} \sum_{i_1, i_2=1}^{n_i} r_{i_1 i_2}(V^{i_1}, V^{i_2}), \quad (4-10)$$

这里 $V^{i_1}, V^{i_2} \in C^i (i_1, i_2 = 1, 2, \dots, n_i)$, $C_{n_i}^2 = \frac{n_i(n_i-1)}{2}$ 。

定义 4.6 群体一致性^[88]. 群体一致性是对各个聚集一致性的综合，群体的一致性指标定义如下：

$$\rho = \sum_{i=1}^K \frac{n_i}{m} \cdot \rho^i, \quad (4-11)$$

那么群体的离散度为 $\sigma = 1 - \rho$ ，这里 ρ 为群体的一致性指标。

由于本节的方法适用于大群体聚类，同样适用于大群体聚类的文献，文献^[88]是基于决策属性之间是独立的，为了便于比较，取聚类阈值 $\gamma=0.75$ 和 $\gamma=0.9$ ，利用表4-1的数据，采用文献^[88]的方法和本节的方法，执行聚类算法，并将算法执行结果进行比较，由（4-10）和（4-11）计算各自聚类后群体一致性指标和群体离散度，见表4-6。

表 4-6 不同聚类方法的聚类结果比较

方法	阈值	一致性指标	离散度
文献[88]	$\gamma=0.75$	$\rho=0.690$	$\sigma=0.310$
文献[88]	$\gamma=0.90$	$\rho = 0.687$	$\sigma=0.313$
本节方法	$\gamma=0.75$	$\rho=0.840$	$\sigma=0.160$
本节方法	$\gamma=0.90$	$\rho=0.750$	$\sigma=0.250$

从表4-6中，很容易看出本章方法在取不同阈值时，一致性指标高于文献^[88]，这说明本章方法考虑了决策属性之间二元的关系，使得群体意见相对集中，从另一方面表明聚类是有效的。

对复杂大群体成员进行有效聚类是群决策中一项非常有用的技术，可应用于从大量群体决策偏好数据中寻找偏好之间的关联性。本节针对复杂大群体多属性决策问题，考虑决策属性间的二元关系，基于属性间二元关系，构建两个偏好矢量的相似度模型，并以此为基础提出了新的聚类方法，在给出的实例结果

比较中,易看出本节方法的优势。本节的二元关系只是一个尝试,可在今后通过模拟或实验推广到其它关系或模糊关系等。

4.5 基于属性二元关系偏好的决策方案排序

在群决策方法研究中,如何确定方案的排序原则,选出最优方案,是群决策方法中关键的一步,本节考虑属性间二元关系,提出适用于属性间存在复杂二元关系的决策方案排序方法。

4.5.1 基于属性二元关系的决策属性权重

属性权重是属性重要性的数量化表示,当属性权重较多时,决策者难于直接确定每个属性的权重。传统的利用专家打分定性确定决策属性的权重虽然比较方便,但当群体成员增多时,不同成员的偏好和价值取向的差异将带来主观性偏差问题,往往难于较准确地确定每个属性的权重。因此需要用一定的方法把属性聚合起来确定一组权,常见的方法有:最小二乘法^[89]、特征向量法^[90]、二元语义集结算子^[91]等。本章基于决策属性的二元关系 Q ,采用特征向量方法确定决策属性的权重。

定义4.7: 群体关系矩阵. 对于第 i 个决策成员的偏好矢量 V^i 及 n 元偏好矢量 $V^i = (v_1^i, v_2^i, \dots, v_n^i)$ 上的属性二元关系 Q , $T^i(Q)$ 为第 i 个决策成员满足二元关系 Q 的关系矩阵,则基于二元关系 Q 的群体关系矩阵为:

$$T(Q) = T^1(Q) \oplus T^2(Q) \oplus \dots \oplus T^m(Q). \quad (4-12)$$

因为群体关系矩阵 $T(Q)$ 是0-1矩阵,最大特征值有唯一的特征向量,利用文献^[2]的特征向量法可求得权重矢量。设 W 是基于二元关系 Q 的决策属性的权重,则

$$T(Q) \cdot W = \lambda_{Max} \cdot W. \quad (4-13)$$

其中:

$$T(Q) = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \dots & t_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ t_{n1} & t_{n2} & \dots & t_{nn} \end{pmatrix},$$

$W = (w_1, w_2, \dots, w_n)^T$, λ_{Max} 是群体关系矩阵 $T(Q)$ 的最大特征值, W 是 λ_{Max} 对应的特征向量。

4.5.2 基于属性二元关系的决策方案排序原则

对于 m 个决策成员，按照属性二元关系 Q 对群体成员偏好矢量集 $\Psi = \{V^i\}$ 进行聚类，得到 K 个聚集，利用式(4-9)可以获得大群体偏好矢量为 $U = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ 。现设决策问题存在 P 个决策方案，构成方案集 $A = \{A_1, A_2, \dots, A_p\}$ ，对其中每个方案 A_l (其中 $l = 1, 2, \dots, p$)，采用以上方法可以获得相应的大群体偏好矢量为 $U^l = (u_1^l, u_2^l, \dots, u_n^l)^T$ ，它们构成大群体偏好矩阵：

$$T^U = (U^1, U^2, \dots, U^p) = \begin{pmatrix} u_1^1 & u_1^2 & \dots & u_1^p \\ u_2^1 & u_2^2 & \dots & u_2^p \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_n^1 & u_n^2 & \dots & u_n^p \end{pmatrix}, \quad (4-14)$$

结合上述属性权重，可得决策方案排序向量为：

$$O = W^T \cdot T^U = (w_1, w_2, \dots, w_n) \cdot \begin{pmatrix} u_1^1 & u_1^2 & \dots & u_1^p \\ u_2^1 & u_2^2 & \dots & u_2^p \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_n^1 & u_n^2 & \dots & u_n^p \end{pmatrix} = (o_1, o_2, \dots, o_p), \quad (4-15)$$

根据决策最大原则，向量 O 中分量数值中的最大者对应的是最优决策方案。

4.6 基于属性二元关系的偏好相似度在应急决策中的应用

为了证明本章提出的大群体决策方法可以解决复杂大群体应急决策问题，利用文献^[63]的案例数据，针对湖南省冰雪灾害应急管理评价问题，对湖南省5个城市（长沙市、株洲市、湘潭市、娄底市、郴州市）应急管理评价进行评价，每个城市根据实际情况聘请具有代表性的30个领域专家，构成群体 Ω ，评价指标划分为三个层次^[63]：第三层61个指标、第二层20个指标、第一层6个指标，通过对61个三级评价指标进行调研和专家打分，逐级别汇集得到6个一级评价指标（抗冰救灾指挥部应急能力、气象部门监测与预警能力、居民应急反应能力、电力部门应急能力、运输管理部门应急能力、其他部门应急能力）。决策问题提出者根据决策目标制定，确定属性之间二元关系 Q 描述为： $\log(x_i + x_j) \geq 0.5, (x_i, x_j) \in Q$ ，即属性之间的二元关系表示两个属性评价价值之和的对数不小于0.5。

将上述评价指标与本章方法中的决策属性对应，可得上述问题的6个属性，简记为属性1、属性2、属性3、属性4、属性5、属性6，将评价城市与决策方案对应，于是得到5个决策方案，构成决策方案集 $\{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5\}$ ，分别对应于长沙市、株洲市、湘潭市、娄底市、郴州市。上述30个专家分别对应地评价5个城市应急管理评价，可得到30个偏好矢量 $\{V^i, |i = 1, 2, \dots, 30\}$ ，其中长沙

市 $\{V^1 \sim V^6\}$ 、株洲市 $\{V^7 \sim V^{13}\}$ 、湘潭市 $\{V^{14} \sim V^{18}\}$ 、娄底市 $\{V^{19} \sim V^{24}\}$ 、郴州市 $\{V^{25} \sim V^{30}\}$ 。

为了计算方便将偏好矢量表的元素值标准化为0到1之间，做如下线性变换^[2]：

$$Z = \frac{y_j^{max} - y_{ij}}{y_j^{max} - y_j^{min}},$$

得到决策专家成员偏好矢量集，记为 $\Psi = \{V^i | i = 1, 2, \dots, 30\}$ ，如下表4-7所示。

该决策问题的决策过程如下：

步骤1 取聚类阈值 $\gamma = 0.9$ ，利用(4-5)式的基于二元关系 Q 的成员偏好矢量相似度模型 $r_{ij}(X_i, X_j) = \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\|T_i + T_j\|_2}{\|T_i\|_\infty + \|T_j\|_\infty}$ ，分别对各个城市的评价专家成员偏好矢量集进行聚类，可得聚集结构，详细结果如下表4-8所示。

步骤2 利用表4-8最后一列数据，得到群体评价偏好矩阵为：

$$T^U = (U^1, U^2, \dots, U^6) = \begin{pmatrix} 0.44 & 0.39 & 0.39 & 0.25 & 0.40 \\ 0.47 & 0.51 & 0.44 & 0.44 & 0.34 \\ 0.33 & 0.39 & 0.34 & 0.45 & 0.51 \\ 0.33 & 0.44 & 0.31 & 0.49 & 0.40 \\ 0.41 & 0.28 & 0.36 & 0.35 & 0.36 \\ 0.45 & 0.38 & 0.53 & 0.39 & 0.38 \end{pmatrix}.$$

步骤3 由偏好矢量表4-7，根据定义4.4可以求出相应的基于二元关系 Q 的属性关系矩阵 $T^i(Q)$ ，组成关系矩阵集合 $\{T^i(Q) | i = 1, 2, \dots, 30\}$ 。再利用关系矩阵的加法法则，由(4-10)式求得群体关系矩阵为：

$$T(Q) = T^1(Q) \oplus T^2(Q) \oplus \dots \oplus T^{30}(Q) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

再利用(4-11)式的属性权重算法，计算属性权重为： $W^T = (0.2467, 0.1680, 0.1374, 0.0031, 0.2761, 0.1732)$ 。

步骤4 由(4-13)式的决策方案排序法则，得到5个城市应急管理能力的排序向

表 4-7 群体成员偏好矢量

成员	属性1	属性2	属性3	属性4	属性5	属性6
V^1	0.8452	0.9037	1.0000	1.0000	0.8003	0.9316
V^2	0.4410	0.6640	0.4722	0.6227	0.5933	0.6010
V^3	0.8613	0.7228	0.7569	0.3666	0.7118	0.9731
V^4	1.0000	0.0000	0.3151	0.1609	0.5933	0.0432
V^5	0.6810	0.9374	0.6152	0.8043	0.7031	1.0000
V^6	0.1113	1.0000	0.0000	0.1963	0.3100	0.5725
V^7	0.6206	0.7769	0.4711	0.5180	0.3172	0.4194
V^8	0.9055	0.9256	0.6170	0.8522	1.0000	0.7818
V^9	1.0000	0.8582	0.7363	0.8865	0.5421	0.8721
V^{10}	0.9786	0.7769	0.8008	0.7156	0.5039	0.4552
V^{11}	0.3351	0.2397	0.2104	0.2844	0.2282	0.2720
V^{12}	0.1273	0.6164	0.4122	0.3690	0.1098	0.4389
V^{13}	0.0000	0.2996	0.3252	0.4216	0.1683	0.2370
V^{14}	0.4397	0.4730	0.3241	0.3034	0.4352	0.6344
V^{15}	0.5536	0.6292	0.6152	0.6836	0.7534	0.8070
V^{16}	0.3338	0.0813	0.4122	0.1254	0.1098	0.6344
V^{17}	0.8311	0.8716	0.4711	0.6387	0.5933	0.6360
V^{18}	0.3847	0.8716	0.3316	0.3034	0.4352	0.6344
V^{19}	0.3143	0.5832	0.2989	0.5299	0.5164	0.5081
V^{20}	0.4028	0.4724	0.5855	0.6682	0.2282	0.2655
V^{21}	0.1709	0.5211	0.5311	0.4885	0.6750	0.4585
V^{22}	0.3787	0.3590	0.5821	0.6943	0.2282	0.4503
V^{23}	0.0657	0.0958	0.4122	0.0875	0.0000	0.1319
V^{24}	0.2145	0.9609	0.4122	0.7516	0.7273	0.8241
V^{25}	0.3532	0.2397	0.5049	0.0000	0.2969	0.0000
V^{26}	0.4584	0.4318	0.6459	0.7516	0.8090	0.9560
V^{27}	0.2862	0.2397	0.5345	0.5186	0.2282	0.1792
V^{28}	0.3311	0.4318	0.4722	0.6138	0.5933	0.7085
V^{29}	0.5938	0.6956	0.6197	0.0124	0.4836	0.4568
V^{30}	0.5724	0.3371	0.4122	0.7167	0.2282	0.6344

表 4-8 基于关系 Q , $\gamma = 0.9$ 时的群体成员聚类结果

被评城市	n_k	聚集成员	聚集偏好矢量 H^k	群体偏好矢量 E
长沙市	2	V^1, V^2	(0.35,0.43,0.40,0.45,0.38,0.42)	(0.44, 0.47, 0.33, 0.33,0.41,0.45)
	1	V^6	(0.09,0.82,0.00,0.16,0.26,0.47)	
	2	V^3, V^4	(0.65,0.25,0.37,0.18,0.45,0.35)	
	1	V^5	(0.37,0.48,0.31,0.41,0.36,0.51)	
株洲市	4	V^7, V^{11}	(0.31,0.56,0.41,0.45,0.23,0.39)	(0.39,0.51,0.39, 0.44,0.28,0.38)
		V^{12}, V^{13}		
	1	V^8	(0.43,0.44,0.29,0.40,0.47,0.37)	
	1	V^9	(0.49,0.4,0.36,0.43,0.26,0.42)	
湘潭市	3	V^{14}, V^{16}, V^{15}	(0.37,0.33,0.38,0.31,0.37,0.59)	(0.39,0.44,0.34, 0.31,0.36,0.53)
	1	V^{17}	(0.49,0.51,0.27,0.37,0.35,0.37)	
	1	V^{18}	(0.29,0.66,0.25,0.23,0.33,0.48)	
娄底市	5	V^{19}, V^{20}, V^{21}	(0.27,0.41,0.49,0.50,0.33,0.37)	(0.25,0.44,0.45, 0.49,0.35,0.39)
		V^{22}, V^{23}		
郴州市	6	V^{25}, V^{26}, V^{27}	(0.40,0.34,0.51,0.40,0.36,0.38)	(0.40,0.34,0.51, 0.40,0.36,0.38)
		V^{28}, V^{29}, V^{30}		

量为:

$$O = W^T \cdot T^U = (0.2467, 0.1680, 0.1374, 0.0031, 0.2761, 0.1732)$$

$$\begin{pmatrix} 0.44 & 0.39 & 0.39 & 0.25 & 0.40 \\ 0.47 & 0.51 & 0.44 & 0.44 & 0.34 \\ 0.33 & 0.39 & 0.34 & 0.45 & 0.51 \\ 0.33 & 0.44 & 0.31 & 0.49 & 0.40 \\ 0.41 & 0.28 & 0.36 & 0.35 & 0.36 \\ 0.45 & 0.38 & 0.53 & 0.39 & 0.38 \end{pmatrix} = (0.4243, 0.3840, 0.4150, 0.367, 0.3988).$$

从排序向量结果可以看出最大值为0.4243, 即长沙市的重大冰雪自然灾害应急管理最好, 其它城市依次为湘潭市、郴州市、株洲市、娄底市。为了说明本章方法的优点, 引入一致性指标 $\rho^{[88]}$, 本章求出的群体一致性指标 $\rho=0.6546$, 大于文献 $^{[63]}$ 的群体一致性指标 $\rho=0.5964$, 即本章基于属性二元关系相似度聚类结果中的各个聚集中成员意见一致性高, 优于文献 $^{[63]}$, 因此基于该聚类方法得到的五个城市重大冰雪自然灾害应急管理排序更为合理。

4.7 本章小结

在复杂偏好下多属性大群体决策中,对决策成员的决策结果进行有效的聚类,是分析以及完成群体决策的基础。群体成员进行有效聚类是复杂大群体决策中一项非常有用的技术,可应用于从大量群体决策偏好数据中寻找偏好之间的关联性。本章针对复杂大群体多属性决策问题,考虑决策属性间的二元关系,探讨了基于属性间二元关系的决策问题,给出两矢量间基于属性二元关系的相似度,并以此提出了一种大群体聚类算法。该算法包括两个主体算法:一是偏好矢量基于属性二元关系形成关系矩阵;二是基于属性关系矩阵,通过偏好矢量的相似度模型,对群体成员进行聚类,通过算例与其它聚类方法比较,数值结果表明本章方法的有效性和实用性。

同时,本章从重大灾害的应急管理实际问题出发,分析应急决策问题的一些新特点,总结出决策属性之间具有复杂关系的新问题,从比较简单的二元关系出发进行研究,给出了基于属性二元关系的关系矩阵,在此基础上提出了两个成员偏好矢量之间的相似度,进一步提出了基于属性二元关系大群体成员偏好集结方法、决策属性权重方法及决策方案排序方法,并以湖南省重大冰雪灾害应急能力评价为案例进行了应用,结果可以看出本章的方法比较适用于复杂大群体评价与决策问题。

本章考虑的二元关系是一个尝试,可在今后通过模拟或实验推广到模糊关系等,另外在本章研究的偏好集结模型中,若决策属性个数 $n \rightarrow \infty$,则相似度 $r(x, y) \rightarrow 1$,即属性个数 n 很大时,所有决策成员被分到一个聚集,因此决策属性数量与聚集结构存在一定关系,今后须进一步揭示其规律。

5 基于模糊集偏好的多属性大群体决策方法

相似度作为度量两个客观事物的相似性的一个重要工具,被广泛应用于各个领域,包括模式识别、线性规划、医学诊断,以及多属性决策问题等^{[92]-[93]}。由于人类思维的复杂性以及客观事物的不确定性和模糊性,用模糊集来表达事物的信息,更能客观准确地表示事物的性质^[94]。Zadeh^[20]在1965年首次提出模糊集理论,成为国内外学者研究的热点。保加利亚学者Atanassov^[25]在模糊集理论的基础上提出直觉模糊集的概念,其特点是同时考虑隶属度与非隶属度两个方面的信息,较传统的模糊集在处理不确定信息时,具有更强的表现能力。

在下面几节中,主要介绍模糊集的概念以及两个模糊集之间的四种相似度,并证明它们满足相似度所具有的性质,给出直觉模糊集的性质以及两个直觉模糊集之间的J-相似度、E-相似度、C-相似度和变系数相似度,并证明它们满足相似度的性质,同时考虑元素的权重,提出加权J-相似度、加权E-相似度、加权C-相似度和加权变系数相似度。为了更好说明本章的E-相似度和变系数相似度模型的优势,在5.3节与文献^[31]的13种相似度进行比较,数值结果表明本节的两种相似度有很好的识别性,列举一多属性决策案例,可以看出本节的两种相似度是有效的。在5.4节继续讨论E-相似度和变系数相似度的实用性,把它们应用解决模糊模式识别问题、模糊医学诊断问题以及模糊多属性多方案决策问题,决策结果更好地表明本节两种相似度的优势。在模糊环境下传统的大群体决策方法比较复杂,借助于直觉模糊集的得分函数,提出了基于直觉模糊集得分矢量间相似度的大群体决策方法。

5.1 模糊集的概念及两模糊集间的相似度

在这节中,介绍模糊集(Fuzzy Set, FS)的概念,以及两模糊集间的相似度,在下面分析中会用到。设 $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ 是一个非空集合, X 上的模糊集集合记为 $\Omega(X)$, $W = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ 是元素 $x_j (j = 1, 2, \dots, n)$ 的权重矢量,这里 $w_j \geq 0$ 且 $\sum_{j=1}^n w_j = 1$ 。

Zadeh在文献^[20],首次提出模糊集的概念,如下:

定义5.1 设 $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ 是一非空集合,则 X 上的模糊集定义如下:

$$A = \{ \langle x_j, \mu_A(x_j) \rangle \mid x_j \in X \},$$

其中隶属函数 $\mu_A(x) : x \rightarrow [0, 1]$, $\mu_A(x_j)$ 是 X 中元素 x_j 属于 A 的隶属度。

设 A 和 B 是 X 上的模糊集, 其中 $A = \{ \langle x_j, \mu_A(x_j) \rangle \mid x_j \in X \}$ 、 $B = \{ \langle x_j, \mu_B(x_j) \rangle \mid x_j \in X \}$, 把模糊集 A 和 B 看成一矢量, 利用矢量空间已有的相似度模型, 定义两直觉模糊集的相似度如下:

定义5.2 两模糊集 A 和 B 之间的J-相似度、E-相似度、C-相似度如下:

$$S_J^{FS}(A, B) = \frac{1}{n} \frac{\sum_{i=1}^n \mu_A(x_i) \mu_B(x_i)}{\sum_{i=1}^n \mu_A^2(x_i) + \sum_{i=1}^n \mu_B^2(x_i) - \sum_{i=1}^n \mu_A(x_i) \mu_B(x_i)}, \quad (5-1)$$

$$S_E^{FS}(A, B) = \frac{1}{n} \frac{2 \sum_{i=1}^n \mu_A(x_i) \mu_B(x_i)}{\sum_{i=1}^n \mu_A^2(x_i) + \sum_{i=1}^n \mu_B^2(x_i)}, \quad (5-2)$$

$$S_C^{FS}(A, B) = \frac{1}{n} \frac{\sum_{i=1}^n \mu_A(x_i) \mu_B(x_i)}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \mu_A^2(x_i)} \sqrt{\sum_{i=1}^n \mu_B^2(x_i)}}. \quad (5-3)$$

定理 5.1. 定义5.2中的两个模糊集之间的三种相似度满足下列性质:

- (P1) $0 \leq S^{FS}(A, B) \leq 1$;
- (P2) $S^{FS}(A, B) = S^{FS}(B, A)$;
- (P3) $S^{FS}(A, B) = 1, A = B, \mu_A(x_i) = \mu_B(x_i), i = 1, 2, \dots, n.$

证明. 这里先证明 $S_J^{FS}(A, B)$ 满足定理5.1中的三个性质, 证明过程如下:

(P1) 显然有 $S_J^{FS}(A, B) \geq 0$, 因此只需证明 $S_J^{FS}(A, B) \leq 1$.

有数学中基本不等式得:

$$\sum_{i=1}^n \mu_A^2(x_i) + \sum_{i=1}^n \mu_B^2(x_i) \geq 2 \sum_{i=1}^n \mu_A(x_i) \mu_B(x_i).$$

那么:

$$S_J^{FS}(A, B) = \frac{1}{n} \frac{\sum_{i=1}^n \mu_A(x_i) \mu_B(x_i)}{\sum_{i=1}^n \mu_A^2(x_i) + \sum_{i=1}^n \mu_B^2(x_i) - \sum_{i=1}^n \mu_A(x_i) \mu_B(x_i)} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1 \leq 1.$$

(P2) $S_J^{FS}(A, B) = S_J^{FS}(B, A)$ 显然成立。

(P3) 当 $A = B$, 即 $\mu_A(x_i) = \mu_B(x_i)$, 对任意的 $i = 1, 2, \dots, n.$

$$S_J^{FS}(A, B) = \frac{1}{n} \frac{\sum_{i=1}^n \mu_A(x_i) \mu_A(x_i)}{\sum_{i=1}^n \mu_A^2(x_i) + \sum_{i=1}^n \mu_A^2(x_i) - \sum_{i=1}^n \mu_A(x_i) \mu_A(x_i)} = 1.$$

相似度 $S_E^{FS}(A, B)$ 和相似度 $S_C^{FS}(A, B)$ 的证明, 与上述证明过程类似, 这里不再一一赘述。

证毕。 □

定义5.3 设 $A = \{\mu_A(x_1), \mu_A(x_2), \dots, \mu_A(x_n)\}$ 和 $B = \{\mu_B(x_1), \mu_B(x_2), \dots, \mu_B(x_n)\}$ 是集合 $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}, x_i \in X$ 上的两个模糊集, 那么两个模糊集之间的变系数相似度定义如下:

$$S_V^{FS}(A, B) = \alpha \frac{2AB}{\|A\|_2^2 + \|B\|_2^2} + (1 - \alpha) \frac{AB}{\|A\|_2 \|B\|_2}, \quad (5-4)$$

其中 $AB = \sum_{i=1}^n \mu_A(x_i) \mu_B(x_i)$, $\|A\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n \mu_A^2(x_i)}$, $\|B\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n \mu_B^2(x_i)}$, 且 $0 \leq \alpha \leq 1$ 。

因此, 两个模糊集之间的变系数相似度满足文献^[24]的性质, 详见定理5.2。

定理 5.2. 两个模糊集之间的变系数相似度满足下列性质:

$$(P1) \ 0 \leq S_V^{FS}(A, B) \leq 1; \quad (5-5)$$

$$(P2) \ S_V^{FS}(A, B) = S_V^{FS}(B, A); \quad (5-6)$$

$$(P3) \ S_V^{FS}(A, B) = 1, A = B, \mu_A(x_i) = \mu_B(x_i), \ i = 1, 2, \dots, n. \quad (5-7)$$

证明. (P1) 显然有 $S_V^{FS}(A, B) \geq 0$, 因此只需证明 $S_V^{FS}(A, B) \leq 1$ 。

由数学中基本不等式得:

$$0 \leq \frac{2AB}{\|A\|_2^2 + \|B\|_2^2} \leq 1, 0 \leq \frac{AB}{\|A\|_2 \|B\|_2} \leq 1. \quad (5-8)$$

把(5-8) 代入(5-4), 可以得到

$$S_V^{FS}(A, B) \leq \alpha + (1 - \alpha) = 1. \quad (5-9)$$

(P2) $S_V^{FS}(A, B) = S_V^{FS}(B, A)$ 显然成立。

(P3) 当 $A = B$, 即 $\mu_A(x_i) = \mu_B(x_i)$, 对任意的 $i = 1, 2, \dots, n$ 。

$$\begin{aligned} S_V^{FS}(A, B) &= \alpha \frac{2AA}{\|A\|_2^2 + \|A\|_2^2} + (1 - \alpha) \frac{AA}{\|A\|_2 \|A\|_2} \\ &= \alpha \frac{2 \sum_{i=1}^n \mu_A(x_i) \mu_A(x_i)}{\sum_{i=1}^n \mu_A^2(x_i) + \sum_{i=1}^n \mu_A^2(x_i)} + (1 - \alpha) \frac{\sum_{i=1}^n \mu_A(x_i) \mu_A(x_i)}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \mu_A^2(x_i)} \sqrt{\sum_{i=1}^n \mu_A^2(x_i)}} \\ &= \alpha + 1 - \alpha = 1. \end{aligned}$$

证毕。 □

5.2 直觉模糊集的概念及两直觉模糊集间的相似度

直觉模糊集的出现学术界及工程技术领域引起了广泛的关注,而如何度量两个直觉模糊集的相似性,以及基于两个直觉模糊集的相似度的应用成为研究热点^{[24],[95]}。Li和Cheng^[26]构造了两个直觉模糊集的相似度,并第一次把它应用解决模式识别问题。随后,Liang和Shi^[27],在2003年发现文献^[24]定义的相似度有些缺陷,在它们的基础上提出了一些新的相似度,并证明这些相似度之间的关系。同时其他学者通过一些距离的模型,也构造了两个直觉模糊集的相似度。Szmidt和Kacprzyk^{[96]-[97]}引入两个直觉模糊集的海明距离,并在此基础上构造了两个直觉模糊集的相似度,最后应用解决多属性群决策问题;另一方面,Huang和Yang^[29]提出了另外一种方法,用两个直觉模糊集的Hausdorff距离来定义它们之间的相似度。徐泽水^[98]在一些几何距离的基础上定义了几种相似度模型,提出了直觉模糊集的正理想偏好值和负理想偏好值,通过计算每个决策方案的直觉模糊偏好值与正理想值、负理想值之间的代数值的大小,来确定决策方案的排序。Ye^[31]针对上述所定义的相似度不足,通过计算两个直觉模糊集的夹角余弦来定义它们之间的相似度,并用数值例子验证方法的有效性,最后应用解决模式识别问题、医学诊断问题和模糊多属性决策问题^{[99],[100],[101],[102],[103]}。

本节分析了参考文献中所列的相似度,发现它们在某些情况下不合理,这会使决策者陷入困境。考虑现有相似度模型的不足,提出了一种变系数相似度模型,并证明它满足其它相似度所具有的性质,用一些数值例子与参考文献^[31]中所列的所有相似度进行比较,可以从数值结果中看出本节方法的优势,最后把本节方法应用解决模式识别问题、医学诊断问题和模糊多属性多方案决策问题。

5.2.1 直觉模糊集

保加利亚学者Atanassow在文献^[25]拓展了Zadeh的模糊集理论,把仅考虑隶属度的传统模糊集推广到同时考虑隶属度、非隶属度和犹豫度这三个方面的直觉模糊集(Intuitionistic fuzzy set, IFS),其定义如下:

定义5.4 X 上的直觉模糊集 A 定义如下:

$$A = \{ \langle x_j, \mu_A(x_j), \nu_A(x_j) \rangle \mid x_j \in X \},$$

其中 μ_A 和 ν_A 分别为 X 中元素 x_j 属于 A 的隶属度和非隶属度。

$$\mu_A : X \longrightarrow [0, 1], x_j \in X \longrightarrow \mu_A(x_j) \in [0, 1],$$

$$\nu_A : X \longrightarrow [0, 1], x_j \in X \longrightarrow \nu_A(x_j) \in [0, 1],$$

且满足条件 $\mu_A(x_j) + \nu_A(x_j) \leq 1$,对任意的 $x_j \in X$ 。

对于每一个直觉模糊集 A , 令 $\pi_A(x_j) = 1 - \mu_A(x_j) - \nu_A(x_j)$, $x_j \in X$, 则 $\pi_A(x_j)$ 表示 x_j 属于 X 的犹豫度, Szmiet 和Kacprzyk称 $\pi_A(x_j)$ 为 x_j 属于 X 的直觉指标. 特别地, 如果 $\pi_A(x_j) = 0$, 对每一个 $x_j \in X$ 都成立, 则直觉模糊集 A 退化成模糊集.

5.2.2 基于直觉模糊集的变系数相似度模型

在不确定信息比较方面, 相似度是一种常用的测量方法, 尤其在模糊信息比较方面, 下面介绍相似度的定义.

定义5.5 设 s 是 $S : \Omega(X)^2 \rightarrow [0, 1]$ 上的一个映射, 如果 $S(A, B)$ 满足下面的条件, 则称 $S(A, B)$ 是直觉模糊集 $A \in \Omega(X)$ 和 $B \in \Omega(X)$ 的相似度.

$$(P1) \quad 0 \leq S(A, B) \leq 1; \quad (5-10)$$

$$(P2) \quad A = B, \mu_A(x_i) = \mu_B(x_i), \nu_A(x_i) = \nu_B(x_i), S(A, B) = 1; \quad (5-11)$$

$$(P3) \quad S(A, B) = S(B, A). \quad (5-12)$$

同理把两个直觉模糊集看成两个矢量, 利用矢量空间已有的相似度, 定义两个直觉模糊集之间的相似度. Ye在文献^[31]定义了两个直觉模糊集之间的C-相似度, 那么J-相似度和E-相似度如下:

定义5.6 设 $A = \{ \langle x_j, \mu_A(x_j), \nu_A(x_j) \rangle | x_j \in X \}$ 和 $B = \{ \langle x_j, \mu_B(x_j), \nu_B(x_j) \rangle | x_j \in X \}$, 是 X 上的两个直觉模糊集, 且 $A, B \in \Omega(X)$, 那么两个直觉模糊集 A 和 B 之间的E-相似度和J-相似度定义如下:

$$S_J = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\mu_A(x_i)\mu_B(x_i) + \nu_A(x_i)\nu_B(x_i)}{\mu_A^2(x_i) + \nu_A^2(x_i) + \mu_B^2(x_i) + \nu_B^2(x_i) - \mu_A(x_i)\mu_B(x_i) - \nu_A(x_i)\nu_B(x_i)}, \quad (5-13)$$

$$S_E = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{2(\mu_A(x_i)\mu_B(x_i) + \nu_A(x_i)\nu_B(x_i))}{(\mu_A^2(x_i) + \nu_A^2(x_i)) + (\mu_B^2(x_i) + \nu_B^2(x_i))}. \quad (5-14)$$

定理 5.3. $S_E(A, B)$ 是两个直觉模糊集 A 和 B 之间的相似度, 且 $A, B \in \Omega(X)$.

证明. 显然, $S_E(A, B)$ 满足定义5.5中的(P3)条件, 下证 $S_E(A, B)$ 满足(P1-P2).

(P1) $S_E(A, B) \geq 0$ 显然成立, 因此, 只需证明 $S_E(A, B) \leq 1$.

因为, $\mu_A^2(x_i) + \mu_B^2(x_i) \geq 2\mu_A(x_i)\mu_B(x_i)$, $\nu_A^2(x_i) + \nu_B^2(x_i) \geq 2\nu_A(x_i)\nu_B(x_i)$, 代入(5-14)式得:

$$\begin{aligned} S_E(A, B) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{2(\mu_A(x_i)\mu_B(x_i) + \nu_A(x_i)\nu_B(x_i))}{(\mu_A^2(x_i) + \nu_A^2(x_i)) + (\mu_B^2(x_i) + \nu_B^2(x_i))} \\ &\leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{2(\mu_A(x_i)\mu_B(x_i) + \nu_A(x_i)\nu_B(x_i))}{2(\mu_A(x_i)\mu_B(x_i) + \nu_A(x_i)\nu_B(x_i))} \leq 1 \quad . \end{aligned}$$

所以, $0 \leq S_E(A, B) \leq 1$ 。

(P2) 当 $A = B$, 即: $\mu_A(x_i) = \mu_B(x_i)$, $\nu_A(x_i) = \nu_B(x_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$ 。

$$S_E(A, B) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{2(\mu_A(x_i)\mu_A(x_i) + \nu_A(x_i)\nu_A(x_i))}{(\mu_A^2(x_i) + \nu_A^2(x_i)) + (\mu_A^2(x_i) + \nu_A^2(x_i))} = 1.$$

证毕。 □

同理可证得J-相似度也是两个直觉模糊集之间的相似度, 那么两个直觉模糊集之间的变系数相似度定义如下:

定义5.7 设 $A = \{ \langle x_j, \mu_A(x_j), \nu_A(x_j) \rangle | x_j \in X \}$ 和 $B = \{ \langle x_j, \mu_B(x_j), \nu_B(x_j) \rangle | x_j \in X \}$, 是 X 上的两个直觉模糊集, 且 $A, B \in \Omega(X)$, 那么两个直觉模糊集 A 和 B 之间的变系数相似度定义如下:

$$S_V(A, B) = \alpha \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{2(\mu_A(x_i)\mu_B(x_i) + \nu_A(x_i)\nu_B(x_i))}{(\mu_A^2(x_i) + \nu_A^2(x_i)) + (\mu_B^2(x_i) + \nu_B^2(x_i))} + (1 - \alpha) \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\mu_A(x_i)\mu_B(x_i) + \nu_A(x_i)\nu_B(x_i)}{\sqrt{\mu_A^2(x_i) + \nu_A^2(x_i)}\sqrt{\mu_B^2(x_i) + \nu_B^2(x_i)}}. \quad (5-15)$$

其中 $0 \leq \alpha \leq 1$, 当 $\alpha = 0$, 变系数相似度模型退化成文献^[31]中的相似度模型; 当 $\alpha = 1$, 变系数相似度模型退化成定义5.6中的 E -相似度模型。下证定义5.7中的相似度模型是两个直觉模糊集之间的相似度。

定理 5.4. $S_v(A, B)$ 是两个直觉模糊集之间的相似度, 且 A 和 $B \in \Omega(X)$ 。

证明. 显然, $S_V(A, B)$ 满足 $S_V(A, B) = S_V(B, A)$, 下证 $S_V(A, B)$ 满足 (P1-P2)。

(P1) $S_V(A, B) \geq 0$ 显然成立, 因此, 只需证明 $S_V(A, B) \leq 1$ 。

由数学中的基本不等式得:

$$\begin{aligned} \mu_A^2(x_i) + \mu_B^2(x_i) &\geq 2\mu_A(x_i)\mu_B(x_i), \nu_A^2(x_i) + \nu_B^2(x_i) \geq 2\nu_A(x_i)\nu_B(x_i), \\ \mu_A(x_i)\mu_B(x_i) + \nu_A(x_i)\nu_B(x_i) &\leq \sqrt{\mu_A^2(x_i) + \nu_A^2(x_i)}\sqrt{\mu_B^2(x_i) + \nu_B^2(x_i)}, \end{aligned}$$

代入 (5-15) 式得:

$$\begin{aligned} S_V(A, B) &= \alpha \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{2(\mu_A(x_i)\mu_B(x_i) + \nu_A(x_i)\nu_B(x_i))}{(\mu_A^2(x_i) + \nu_A^2(x_i)) + (\mu_B^2(x_i) + \nu_B^2(x_i))} \\ &\quad + (1 - \alpha) \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\mu_A(x_i)\mu_B(x_i) + \nu_A(x_i)\nu_B(x_i)}{\sqrt{\mu_A^2(x_i) + \nu_A^2(x_i)}\sqrt{\mu_B^2(x_i) + \nu_B^2(x_i)}} \\ &\leq \alpha + 1 - \alpha \leq 1. \end{aligned}$$

所以, $0 \leq S_V(A, B) \leq 1$ 。

(P2) 当 $A = B$, 即: $\mu_A(x_i) = \mu_B(x_i)$, $\nu_A(x_i) = \nu_B(x_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$ 。

$$\begin{aligned} S_V(A, B) &= \alpha \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{2(\mu_A(x_i)\mu_B(x_i) + \nu_A(x_i)\nu_B(x_i))}{(\mu_A^2(x_i) + \nu_A^2(x_i)) + (\mu_B^2(x_i) + \nu_B^2(x_i))} \\ &\quad + (1 - \alpha) \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\mu_A(x_i)\mu_B(x_i) + \nu_A(x_i)\nu_B(x_i)}{\sqrt{\mu_A^2(x_i) + \nu_A^2(x_i)}\sqrt{\mu_B^2(x_i) + \nu_B^2(x_i)}} \\ &= 1. \end{aligned}$$

证毕。 □

在多数情况下, 要考虑元素 $x_j (j = 1, 2, \dots, n; x_j \in X)$ 的权重, 因此把 (5-15) 式拓展可得到基于元素 $x_j (j = 1, 2, \dots, n)$ 权重的变系数相似度模型, 如下:

$$\begin{aligned} WS_V(A, B) &= \sum_{i=1}^n w_i \left[\alpha \frac{2(\mu_A(x_i)\mu_B(x_i) + \nu_A(x_i)\nu_B(x_i))}{\mu_A^2(x_i) + \nu_A^2(x_i) + \mu_B^2(x_i) + \nu_B^2(x_i)} \right. \\ &\quad \left. + (1 - \alpha) \frac{\mu_A(x_i)\mu_B(x_i) + \nu_A(x_i)\nu_B(x_i)}{\sqrt{\mu_A^2(x_i) + \nu_A^2(x_i)}\sqrt{\mu_B^2(x_i) + \nu_B^2(x_i)}} \right]. \end{aligned} \quad (5-16)$$

其中 $w_i \in [0, 1]$, $i=1, 2, \dots, n$, 且 $\sum_{i=1}^n w_i = 1$ 。

如果令 $w_i = 1/n, i = 1, 2, \dots, n$, 可得到 $WS_V(A, B) = S_V(A, B)$ 。显然, 两个直觉模糊集 A 和 B 之间的加权变系数相似度模型也满足下面的性质:

(P1') $0 \leq WS_V(A, B) \leq 1$;

(P2') $WS_V(A, B) = 1, A = B, \mu_A(x_i) = \mu_B(x_i), \nu_A(x_i) = \nu_B(x_i)$;

(P3') $WS_V(A, B) = WS_V(B, A)$ 。

证明过程与前面定理5.3证明过程类似, 这里不再赘述。同理拓展 (5-13) - (5-14) 可得到加权J-相似度和加权E-相似度, 如下:

$$WS_J = \sum_{i=1}^n w_i \frac{\mu_A(x_i)\mu_B(x_i) + \nu_A(x_i)\nu_B(x_i)}{\mu_A^2(x_i) + \nu_A^2(x_i) + \mu_B^2(x_i) + \nu_B^2(x_i) - \mu_A(x_i)\mu_B(x_i) - \nu_A(x_i)\nu_B(x_i)}, \quad (5-17)$$

$$WS_E = \sum_{i=1}^n w_i \frac{2(\mu_A(x_i)\mu_B(x_i) + \nu_A(x_i)\nu_B(x_i))}{(\mu_A^2(x_i) + \nu_A^2(x_i)) + (\mu_B^2(x_i) + \nu_B^2(x_i))}. \quad (5-18)$$

5.3 不同的两直觉模糊集之间的相似度的比较

设 A 和 B 是集合 $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ 上的两个直觉模糊集, 文献^[31]列举了现有的13种基于两个直觉模糊集的相似度方法如下:

令 $T_A(x_i) = \mu_A(x_i) - \nu_A(x_i)$, $T_B(x_i) = \mu_B(x_i) - \nu_B(x_i)$, $T_\mu(x_i) = \mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)$, $T_\nu(x_i) = \nu_A(x_i) - \nu_B(x_i)$ 。

$$S_C(A, B) = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n |T_A(x_i) - T_B(x_i)|}{2n}; \quad (5-19)$$

$$S_H(A, B) = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n |T_\mu(x_i)| + |T_\nu(x_i)|}{2n}; \quad (5-20)$$

$$S_L(A, B) = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n |T_A(x_i) - T_B(x_i)|}{4n} - \frac{\sum_{i=1}^n |T_\mu(x_i)| + |T_\nu(x_i)|}{4n}; \quad (5-21)$$

$$S_O(A, B) = 1 - \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (T_\mu^2(x_i) + T_\nu^2(x_i))}{2n}}; \quad (5-22)$$

$$S_{DC}(A, B) = 1 - \sqrt[p]{\frac{\sum_{i=1}^n |\psi_A(x_i) - \psi_B(x_i)|^p}{n}}, \quad (5-23)$$

其中, $\psi_A(x_i) = (\mu_A(x_i) + 1 - \nu_A(x_i))/2$, $\psi_B(x_i) = (\mu_B(x_i) + 1 - \nu_B(x_i))/2$;

$$S_{HB}(A, B) = \frac{\rho_\mu(A, B) + \rho_\nu(A, B)}{2}, \quad (5-24)$$

其中, $\rho_\mu(A, B) = 1 - \sqrt[p]{\frac{\sum_{i=1}^n |\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)|^p}{n}}$, $\rho_\nu(A, B) = 1 - \sqrt[p]{\frac{\sum_{i=1}^n |\nu_A(x_i) - \nu_B(x_i)|^p}{n}}$, $S_{HB}(A, B) = S_H(A, B)$ $p=1$;

$$S_e^p(A, B) = 1 - \sqrt[p]{\frac{\sum_{i=1}^n (\phi_\mu(x_i) + \phi_\nu(x_i))^p}{n}}, \quad (5-25)$$

其中, $\phi_\mu(x_i) = |\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)|/2$, $\phi_\nu(x_i) = |(1 - \nu_A(x_i))/2 - (1 - \nu_B(x_i))/2|$;

$$S_s^p(A, B) = 1 - \sqrt[p]{\frac{\sum_{i=1}^n (\varphi_{s1}(x_i) + \varphi_{s2}(x_i))^p}{n}}, \quad (5-26)$$

其中, $\varphi_{s1}(x_i) = |m_{A1}(x_i) - m_{B1}(x_i)|/2$, $\varphi_{s2}(x_i) = |m_{A2}(x_i) - m_{B2}(x_i)|/2$, $m_{A1}(x_i) = (\mu_A(x_i) + m_A(x_i))/2$, $m_{B1}(x_i) = (\mu_B(x_i) + m_B(x_i))/2$, $m_{A2}(x_i) = (m_A(x_i) + 1 - \nu_A(x_i))/2$, $m_{B2}(x_i) = (m_B(x_i) + 1 - \nu_B(x_i))/2$, $m_A(x_i) = (\mu_A(x_i) + 1 - \nu_A(x_i))/2$, $m_B(x_i) = (\mu_B(x_i) + 1 - \nu_B(x_i))/2$;

$$S_h^p(A, B) = 1 - \sqrt[p]{\frac{\sum_{i=1}^n (\eta_1(i) + \eta_2(i) + \eta_3(i))^p}{3n}}, \quad (5-27)$$

其中 $\eta_1(i) = \phi_\mu(x_i) + \phi_\nu(x_i)$ (见 S_e^p) 或者 $\eta_1(i) = \varphi_{s1}(x_i) + \varphi_{s2}(x_i)$ (见 S_s^p), $\eta_2(i) = |\psi_A(x_i) - \psi_B(x_i)|$ (见 S_{DC}), $\eta_3(i) = \max(l_A(i), l_B(i)) - \min(l_A(i), l_B(i))$, $l_A(i) = (1 - \mu_A(x_i) - \nu_A(x_i))/2$, $l_B(i) = (1 - \mu_B(x_i) - \nu_B(x_i))/2$;

$$S_{HY}^1(A, B) = 1 - d_H(A, B), \quad (5-28)$$

其中, $d_H(A, B) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \max(|\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)|, |\nu_A(x_i) - \nu_B(x_i)|)$;

$$S_{HY}^2(A, B) = (e^{-d_H(A, B)} - e^{-1}) / (1 - e^{-1}), \quad (5-29)$$

其中, $d_H(A, B) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \max(|\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)|, |\nu_A(x_i) - \nu_B(x_i)|)$;

$$S_{HY}^3(A, B) = (1 - d_H(A, B)) / (1 + d_H(A, B)), \quad (5-30)$$

其中, $d_H(A, B) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \max(|\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)|, |\nu_A(x_i) - \nu_B(x_i)|)$;

$$C(A, B) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\mu_A(x_i)\mu_B(x_i) + \nu_A(x_i)\nu_B(x_i)}{\sqrt{\mu_A^2(x_i) + \nu_A^2(x_i)}\sqrt{\mu_B^2(x_i) + \nu_B^2(x_i)}}. \quad (5-31)$$

为了说明本文变系数相似度模型优势, 取6个数值例子, 与文献^[31]中例举的13种相似度方法比较, 由公式(5-15)和(5.19)-(5.31), 得到14种相似度, 其数值结果比较见表5-1。

表 5-1 直觉模糊集A 和B之间的相似度

	1	2	3	4	5	6
A	(0.3, 0.3)	(0.3, 0.4)	(1, 0)	(0.5, 0.5)	(0.4, 0.2)	(0.4, 0.2)
B	(0.4, 0.4)	(0.4, 0.3)	(0, 0)	(0.0, 0.0)	(0.5, 0.3)	(0.5, 0.2)
S_C	1.0000	0.9000	0.5000	1.0000	1.0000	0.9500
S_H	0.9000	0.9000	0.5000	0.5000	0.9000	0.9500
S_L	0.9500	0.9000	0.5000	0.7500	0.9500	0.9500
S_O	1.0000	0.9000	0.5000	1.0000	1.0000	0.9500
S_{DC}	0.9500	0.9000	0.5000	0.7500	0.9500	0.9500
S_{HB}	0.9000	0.9000	0.5000	0.5000	0.9000	0.9500
S_e^p	0.9000	0.9000	0.5000	0.5000	0.9000	0.9500
S_s^p	0.9500	0.9000	0.5000	0.7500	0.9500	0.9500
S_h^p	0.9300	0.9330	0.5000	0.6700	0.9300	0.9500
S_{HY}^1	0.9000	0.9000	0.0000	0.5000	0.9000	0.9000
S_{HY}^2	0.8500	0.8500	0.0000	0.3800	0.8500	0.8500
S_{HY}^3	0.8200	0.8200	0.0000	0.3300	0.8200	0.8200
C	1.0000	0.9600	0.0000	0.0000	0.9971	0.9965
E	0.9600	0.9600	0.0000	0.0000	0.9630	0.9796
$S_V^{\alpha=0.2}$	0.9920	0.9600	0.0000	0.0000	0.9902	0.9932
$S_V^{\alpha=0.8}$	0.9680	0.9600	0.0000	0.0000	0.9698	0.9830

从表5-1的数值结果比较中, 可以看出有些相似度方法在某些情况下不能成立, 在一些实际应用中会使得决策者陷入困境, 虽然文献^[104]和文献^[31]提出的基

于直觉模糊集的相似度方法 S_h^p 和 C 有较好的识别性,但是,当 $A = \langle 1, 0 \rangle$, $B = \langle 0, 0 \rangle$ 时, $S_h^p = 0.5$ 不合理; 而当 $A = \langle 0.3, 0.3 \rangle$, $B = \langle 0.4, 0.4 \rangle$ 时, $C = 1$ 不合理。因此, 从表5-1 可以看出本文的方法, 比其他方法更合理, 在下面的例子中可以看出本文方法的有效性。

例1, 假设方案集 $A = \{A_1, A_2, A_3\}$, $C = \{c_1, c_2, c_3\}$ 是一属性集, 方案 $A_i (i = 1, 2, 3)$ 对属性 C 的直觉模糊偏好值分别为:

$$\begin{aligned} A_1 &= \{ \langle c_1, 0.3, 0.3 \rangle, \langle c_2, 0.2, 0.2 \rangle, \langle c_3, 0.4, 0.4 \rangle \}, \\ A_2 &= \{ \langle c_1, 0.8, 0.1 \rangle, \langle c_2, 1.0, 0.0 \rangle, \langle c_3, 0.9, 0.0 \rangle \}, \\ A_3 &= \{ \langle c_1, 0.4, 0.4 \rangle, \langle c_2, 0.8, 0.8 \rangle, \langle c_3, 0.7, 0.7 \rangle \}. \end{aligned}$$

理想方案的直觉模糊偏好值为:

$$AI = \{ \langle c_1, 0.2, 0.2 \rangle, \langle c_2, 0.3, 0.3 \rangle, \langle c_3, 0.5, 0.5 \rangle \},$$

计算理想方案与方案 $A_i (i = 1, 2, 3)$ 的相似度, 根据相似度大小, 排列方案。由(5-14)式和(5-15)式, 得:

$$E(AI, A_1) = 0.9406, \quad E(AI, A_2) = 0.8887, \quad E(AI, A_3) = 0.8012;$$

$$S_V(AI, A_1) = 0.9881, \quad S_V(AI, A_2) = 0.9777, \quad S_V(AI, A_3) = 0.9602.$$

根据相似度大小排列方案可以得到: $A_1 \succ A_2 \succ A_3$, 最优方案为 A_1 。若采用文献^[31]中的方法, 可以计算理想方案和方案 $A_i (i = 1, 2, 3)$ 的相似度, 为

$$C(AI, A_1) = 1, \quad C(AI, A_2) = 0.8457, \quad C(AI, A_3) = 1,$$

这时文献^[31]的方法失效, 会使得决策者陷入困境, 无法选出最优方案, 从而看出本文的方法比文献^[31]的方法更合理。

5.4 直觉模糊集相似度的应用

下面进一步研究和讨论文献^{[26],[31],[104]}的案例。

5.4.1 模式识别案例分析

为了说明本文方法的实用性, 把基于直觉模糊数的变系数相似度模型应用到模式识别问题^{[26],[31],[104]}中。

设 C_1, C_2 和 C_3 是三种已知的模式, $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ 是已知的非空集合。已知三种模式在 X 上的直觉模糊集分别为:

$$\begin{aligned} C_1 &= \{ \langle x_1, 1.0, 0.0 \rangle, \langle x_2, 0.8, 0.0 \rangle, \langle x_3, 0.7, 0.1 \rangle \}, \\ C_2 &= \{ \langle x_1, 0.8, 0.1 \rangle, \langle x_2, 1.0, 0.0 \rangle, \langle x_3, 0.9, 0.0 \rangle \}, \\ C_3 &= \{ \langle x_1, 0.6, 0.2 \rangle, \langle x_2, 0.8, 0.0 \rangle, \langle x_3, 1.0, 0.0 \rangle \}. \end{aligned}$$

设 A 是未知的模式, 其在 X 上的直觉模糊集表示为:

$$A = \{ \langle x_1, 0.5, 0.3 \rangle, \langle x_2, 0.6, 0.2 \rangle, \langle x_3, 0.8, 0.1 \rangle \}.$$

为了确定未知模式 A , 属于上述三种已知的模式 C_1, C_2 和 C_3 的哪一种, 根据最大相似度原则, 模式 A 属于 $C_k(k = 1, 2, 3)$ 可由下面式子确定:

$$k = \max_{1 \leq i \leq 3} \{S_V(C_i, A)\}. \quad (5-32)$$

令 $\alpha = 0.8$, 由(5-15)式, 可以计算得到 $C_i(i = 1, 2, 3)$ 和 A 之间的变系数相似度, 如下:

$$S_V(C_1, A) = 0.9256, \quad S_V(C_2, A) = 0.9423, \quad S_V(C_3, A) = 0.9690.$$

由(5-32)式, 可以判断出模式 A 属于模式 C_3 。这个结果与文献^{[26],[31],[104]}结果一样。

假设 x_1, x_2 和 x_3 的权重分别是0.5, 0.3和0.2, 由最大相似度原则, 模式 A 属于 $C_k(k = 1, 2, 3)$ 可由下面式子确定:

$$k = \max_{1 \leq i \leq 3} \{WS_V(C_i, A)\}. \quad (5-33)$$

令 $\alpha = 0.8$, 由(5-15)式, 可以计算得到

$$WS_V(C_1, A) = 0.9003, \quad WS_V(C_2, A) = 0.9301, \quad WS_V(C_3, A) = 0.9684,$$

再根据(5-33)式, 可以得出模式 A 同样属于 C_3 , 结论与文献^{[26],[31],[104]}结论一样。

5.4.2 医学诊断案例分析

为了进一步讨论本文方法的有效性和广泛的应用性, 将继续讨论文献^{[31],[95]}的医学诊断问题。实际上5.4.2节的案例也是一种特殊的模式识别问题。

设诊断集合 $A = \{A_1(\text{流感}), A_2(\text{疟疾}), A_3(\text{伤寒}), A_4(\text{胃病}), A_5(\text{胸病})\}$, 和症状集合 $B = \{b_1(\text{体温}), b_2(\text{头痛}), b_3(\text{胃痛}), b_4(\text{咳嗽}), b_5(\text{胸痛})\}$ 。假设有一个病人, 考虑上述症状, 可以由下面的直觉模糊集表示:

$$\begin{aligned} P(\text{Patient}) &= \{ \langle b_1, 0.8, 0.1 \rangle, \langle b_2, 0.6, 0.1 \rangle, \langle b_3, 0.2, 0.8 \rangle, \langle b_4, 0.6, 0.1 \rangle, \\ &\quad \langle b_5, 0.1, 0.6 \rangle \}. \end{aligned}$$

同样, 考虑上述五种症状, 诊断 $A_i(i = 1, 2, 3, 4, 5)$, 可以由直觉模糊集表示为:

$$\begin{aligned}
 A_1(Vf) &= \{ \langle b_1, 0.4, 0.0 \rangle, \langle b_2, 0.3, 0.5 \rangle, \langle b_3, 0.1, 0.7 \rangle, \langle b_4, 0.4, 0.3 \rangle, \\
 &\quad \langle b_5, 0.1, 0.7 \rangle \}, \\
 A_2(M) &= \{ \langle b_1, 0.7, 0.0 \rangle, \langle b_2, 0.2, 0.6 \rangle, \langle b_3, 0.0, 0.9 \rangle, \langle b_4, 0.7, 0.0 \rangle, \\
 &\quad \langle b_5, 0.1, 0.8 \rangle \}, \\
 A_3(T) &= \{ \langle b_1, 0.3, 0.3 \rangle, \langle b_2, 0.6, 0.1 \rangle, \langle b_3, 0.2, 0.7 \rangle, \langle b_4, 0.2, 0.6 \rangle, \\
 &\quad \langle b_5, 0.1, 0.9 \rangle \}, \\
 A_4(Sp) &= \{ \langle b_1, 0.1, 0.7 \rangle, \langle b_2, 0.2, 0.4 \rangle, \langle b_3, 0.8, 0.0 \rangle, \langle b_4, 0.2, 0.7 \rangle, \\
 &\quad \langle b_5, 0.2, 0.7 \rangle \}, \\
 A_5(Cp) &= \{ \langle b_1, 0.1, 0.8 \rangle, \langle b_2, 0.0, 0.8 \rangle, \langle b_3, 0.2, 0.8 \rangle, \langle b_4, 0.2, 0.8 \rangle, \\
 &\quad \langle b_5, 0.8, 0.1 \rangle \}.
 \end{aligned}$$

为了断定病人 P 属于五种诊断 A_1, A_2, A_3, A_4 和 A_5 的哪一种, 与前面的的模式识别问题一样, 病人 P 属于 $A_k(k = 1, 2, 3, 4, 5)$, 由下式确定:

$$k = \max_{1 \leq i \leq 5} \{S_V(A_i, P)\}. \quad (5-34)$$

同理, 令 $\alpha = 0.8$, 由(5-15)式, 可计算得到:

$$\begin{aligned}
 S_V(P, A_1) &= 0.8949, \quad S_V(P, A_2) = 0.8807, \quad S_V(P, A_3) = 0.8422, \\
 S_V(P, A_4) &= 0.5012, \quad S_V(P, A_5) = 0.4176.
 \end{aligned}$$

然后, 根据决策最大原则, 由(5-34)式可以判定病人属于 A_1 (流感), 即: 病人得了流感, 结论与文献^{[31],[95]}的结论一致。同时, 令 $\alpha = 0.2, \alpha = 0.5$ 时, 上述决策结果一致, 这里不再赘述。

5.4.3 模糊多属性多方案决策案例分析

近几十年关于模糊多属性问题的决策方法层出不穷, 以属性值是直觉模糊集为例, 模糊多属性决策方法有加权平均算子、几何平均算子、TOPSIS法、模糊层次分析法等。Li在传统的有序加权算子基础上提出了直觉模糊集的多属性决策方法^[105], Wu和Zhang在文献^[106]提出了直觉模糊集的加权熵, 借助模糊线性规划方法求出属性的权重, 根据熵权最大原则, 确定决策方案的排序并从中选出最优方案。Wang和Li在文献^[107]回顾了直觉模糊集的所有得分函数, 基于直觉模糊集和混合熵的理论, 改进提出了基于混合熵的决策方法, 列举几个数值例子, 从数值结果中可以看出文献^[107]的优势。在这一小节中, 我们将本节的方法应用到模糊多属性大群体决策问题^{[30],[108],[109],[110]-[111]}中。

定义5.8 设某一决策问题有 p 个决策方案构成方案集 $A = \{A_1, A_2, \dots, A_p\}$, n 个决策属性 $C = \{C_1, C_2, \dots, C_n\}$, 决策成员对上述 p 个方案从 n 个属性进行评价, 评价值用直觉模糊集给出, 第 i 个方案的第 j 个属性值为: $v_j^i = \langle C_j, \mu_v(C_j), \nu_v(C_j) \rangle$, 并且 $i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$, 矢量 $V^i = (v_1^i, v_2^i, \dots, v_n^i)$ 称为方案 A_i 的直觉模糊偏好矢量。

某软件开发公司为了拓展业务, 由三个研发团队制定了未来发展的三个业务: (1) A_1 是开发搜索引擎; (2) A_2 是移动电话操作系统; (3) A_3 是开发在线游戏。我们的目的是从这三个方案(A_1, A_2, A_3)挑选出最好的方案, 三个方案从以下四个属性(评价准则)考量: (1) C_1 : 开发团队的潜力; (2) C_2 : 营业利率最大; (3) C_3 : 成功的可能性; (4) C_4 : 技术成熟度。

考虑四个决策属性 $C_j(j = 1, 2, 3, 4)$, 每个方案 $A_i(i = 1, 2, 3)$ 的模糊偏好矢量用直觉模糊集表示如下:

$$\begin{aligned} A_1 &= \{ \langle C_1, 0.60, 0.40 \rangle, \langle C_2, 0.55, 0.35 \rangle, \langle C_3, 0.40, 0.20 \rangle, \langle C_4, 0.52, 0.45 \rangle \}, \\ A_2 &= \{ \langle C_1, 0.55, 0.35 \rangle, \langle C_2, 0.65, 0.30 \rangle, \langle C_3, 0.55, 0.04 \rangle, \langle C_4, 0.45, 0.15 \rangle \}, \\ A_3 &= \{ \langle C_1, 0.60, 0.30 \rangle, \langle C_2, 0.68, 0.30 \rangle, \langle C_3, 0.72, 0.25 \rangle, \langle C_4, 0.65, 0.12 \rangle \}. \end{aligned}$$

由文献^[98], 那么直觉模糊集的正理想直觉模糊集和负理想直觉模糊集定义如下:

$$A^+ = \{ \langle C_j, \mu_{A^+}(C_j), \nu_{A^+}(C_j) \rangle \mid C_j \in C \}, \quad (5-35)$$

$$A^- = \{ \langle C_j, \mu_{A^-}(C_j), \nu_{A^-}(C_j) \rangle \mid C_j \in C \}, \quad (5-36)$$

其中,

$$\begin{aligned} \mu_{A^+}(C_j) &= \max_i \{ \mu_{A_i}(C_j) \}, \quad \nu_{A^+}(C_j) = \min_i \{ \nu_{A_i}(C_j) \}, \\ \mu_{A^-}(C_j) &= \min_i \{ \mu_{A_i}(C_j) \}, \quad \nu_{A^-}(C_j) = \max_i \{ \nu_{A_i}(C_j) \}. \end{aligned}$$

由(5-35)和(5-36)式, 可分别求得三个方案直觉模糊集 $A_i(i = 1, 2, 3)$ 的正理想方案集 A^+ 和负理想方案集 A^- 如下:

$$A^+ = \{ \langle C_1, 0.60, 0.30 \rangle, \langle C_2, 0.68, 0.30 \rangle, \langle C_3, 0.72, 0.04 \rangle, \langle C_4, 0.65, 0.12 \rangle \},$$

和

$$A^- = \{ \langle C_1, 0.55, 0.40 \rangle, \langle C_2, 0.55, 0.30 \rangle, \langle C_3, 0.40, 0.25 \rangle, \langle C_4, 0.45, 0.45 \rangle \}.$$

利用公式(5-14), 可得到三个方案集 $A_i(i = 1, 2, 3)$ 与正理想方案集 A^+ 之间的E-相似度为:

$$S_E(A^+, A_1) = 0.9134, \quad S_E(A^+, A_2) = 0.9741, \quad S_E(A^+, A_3) = 0.9900;$$

同理, 由 (5-14) 可求得三个方案集 $A_i (i = 1, 2, 3)$ 与负理想方案集 A^- 之间的E-相似度为:

$$S_E(A^-, A_1) = 0.9957, S_E(A^-, A_2) = 0.9292, S_E(A^-, A_3) = 0.9160.$$

为了便于选出最优方案, 基于 (5-35) 和 (5-36) 定义两个直觉模糊集的相对相似度 R , 那么方案集 A_i 与正理想方案集 A^+ 和负理想方案集 A^- 的相对相似度 R_i 为:

$$R_i = \frac{S_E(A^+, A_i)}{S_E(A^-, A_i)}, i = 1, 2, \dots, n. \quad (5-37)$$

由(5-37)式, 可求得相对相似度为:

$$R_1 = 0.9174, R_2 = 1.0484, R_3 = 1.0807.$$

因此由相对相似度大小来排列方案, 得: $A_3 \succ A_2 \succ A_1$, 所以最优方案是 A_3 。

在多属性决策中, 通常考虑决策属性的权重, 设决策属性 $C_j (j = 1, 2, 3, 4)$ 的权重矢量为: $W = (0.17, 0.3, 0.4, 0.13)$ 。

类似前面的步骤, 由(5-18), 可得到:

$$WS_E(A^+, A_1) = 0.9032, WS_E(A^+, A_2) = 0.9767, WS_E(A^+, A_3) = 0.9840,$$

$$WS_E(A^-, A_1) = 0.9956, WS_E(A^-, A_2) = 0.9270, WS_E(A^-, A_3) = 0.9183.$$

由(5-37)式, 可求得加权相对相似度为:

$$WR_1 = 0.9072, WR_2 = 1.0536, WR_3 = 1.0715.$$

根据加权相对相似度大小排列方案, 得: $A_3 \succ A_2 \succ A_1$, 即: A_3 为最优方案。

5.5 基于直觉模糊集得分矢量间相似度的多属性群决策方法

5.5.1 直觉模糊集的得分函数

设 $\theta = \{ \langle x_j, \mu_\theta(x_j), \nu_\theta(x_j) \rangle \mid x_j \in X \}$ 和 $\eta = \{ \langle x_j, \mu_\eta(x_j), \nu_\eta(x_j) \rangle \mid x_j \in X \}$ 是集合 $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ 上的两个直觉模糊集, 那么两个直觉模糊集的运算法则如下:

$$\theta + \eta = \{ \langle x_j, \mu_\theta(x_j) + \mu_\eta(x_j), \nu_\theta(x_j) + \nu_\eta(x_j) \rangle \mid x_j \in X \},$$

$$\theta \eta = \{ \langle x_j, \mu_\theta(x_j)\mu_\eta(x_j), \nu_\theta(x_j)\nu_\eta(x_j) \rangle \mid x_j \in X \},$$

$$\lambda \theta = \{ \langle x_j, \lambda\mu_\theta(x_j), \lambda\nu_\theta(x_j) \rangle \mid x_j \in X \}.$$

那么，两个直觉模糊集的大小比较原则如下：

$$\begin{aligned} \theta \subset \eta, & \text{ iff } \{ \mu_\theta(x) \leq \mu_\eta(x), \nu_\theta(x) \geq \nu_\eta(x) \mid \forall x \in X \} \\ \theta = \eta, & \text{ iff } \{ \mu_\theta(x) = \mu_\eta(x), \nu_\theta(x) = \nu_\eta(x) \mid \forall x \in X \} \end{aligned}$$

为了对直觉模糊集进行有效的排序，需要借助于直觉模糊集的得分函数和精确函数。在一般情况下，比较两个直觉模糊集的大小，需要把直觉模糊集由得分函数转化成得分值，得分函数是比较直觉模糊集大小的有力工具，得分值越大直觉模糊集越大。国内外许多学者对于直觉模糊集的得分函数的定义给出许多形式^{[112],[113],[114]}，一个有效的得分函数需要考虑直觉模糊集的隶属函数和非隶属函数两方面的信息，同时有较强的选择能力和较高的精确度。Chen和Tan在文献^[115]首次提出得分函数的定义如下：

定义5.9^[115] 设 $\theta = (\mu, \nu)$ 是集合 X 上的直觉模糊集， X 中仅有一个元素，那么

$$D(\theta) = \mu - \nu \tag{5-38}$$

称为 θ 的得分值， $D(\theta)$ 为得分函数，这里 $D(\theta) \in [-1, 1]$ 。 θ 的得分值越大，直觉模糊集 θ 越大。

Hong和Choi在文献^[116]提出了精确函数的定义，如下：

定义5.10^[116] 设 $\theta = (\mu, \nu)$ 是集合 X 上的直觉模糊集， X 中仅有一个元素，那么

$$F(\theta) = \mu + \nu \tag{5-39}$$

称为 θ 的精确值， $F(\theta)$ 为精确函数，这里 $F(\theta) \in [0, 2]$ 。如果两个直觉模糊集的得分值相等，那么 θ 的精确值越大，直觉模糊集 θ 越大。

5.5.2 直觉模糊集的得分矢量之间的相似度

定义5.10 设某一多属性群决策问题有 p 个方案 $A = \{A_1, A_2, \dots, A_p\}$ ， n 个属性构成属性集 $C = \{C_1, C_2, \dots, C_n\}$ ，每个方案由直觉模糊集表示如下：

$$A_i = \{ (C_1, \langle \mu_{i1}, \nu_{i1} \rangle), (C_2, \langle \mu_{i2}, \nu_{i2} \rangle), \dots, (C_m, \langle \mu_{im}, \nu_{im} \rangle) \},$$

其中， μ_{ij} 是指方案 A_i 满足属性 C_j 的隶属度， ν_{ij} 表示方案 A_i 满足属性 C_j 的非隶属度。由公式(5-38)可求得方案 A_i 的各个属性的得分值组成如下向量，

$$D_i = (d_{i1}, d_{i2}, \dots, d_{im}) = (\mu_{i1} - \nu_{i1}, \mu_{i2} - \nu_{i2}, \dots, \mu_{im} - \nu_{im}). \tag{5-40}$$

把(5-40)式定义的向量称为得分矢量。

因为得分值 $D(\theta) \in [-1, 1]$, 把 (5-40) 得到的直觉模糊集的得分矢量, 标准化到 $[0, 1]$ 得,

$$\tilde{D}_i = (\tilde{d}_{i1}, \tilde{d}_{i2}, \dots, \tilde{d}_{im}) = \left(\frac{d_{i1} - D_i^1}{D_i^2 - D_i^1}, \frac{d_{i2} - D_i^1}{D_i^2 - D_i^1}, \dots, \frac{d_{im} - D_i^1}{D_i^2 - D_i^1} \right), \quad (5-41)$$

其中, $D_i^1 = \min \{d_{i1}, d_{i2}, \dots, d_{im}\}$, $D_i^2 = \max \{d_{i1}, d_{i2}, \dots, d_{im}\}$.

基于向量空间的J-相似度、E-相似度和C-相似度, 拓展得到基于直觉模糊集的得分矢量间的相似度, 那么两个方案集 A_i 和 A_j 之间的相似度定义如下:

$$S_J^{IFS}(A_i, A_j) = \frac{\tilde{D}_i \tilde{D}_j}{\|\tilde{D}_i\|_2^2 + \|\tilde{D}_j\|_2^2 - \tilde{D}_i \tilde{D}_j} = \frac{\sum_{k=1}^m \tilde{d}_{ik} \tilde{d}_{jk}}{\sum_{k=1}^m \tilde{d}_{ik}^2 + \sum_{k=1}^m \tilde{d}_{jk}^2 - \sum_{k=1}^m \tilde{d}_{ik} \tilde{d}_{jk}}, \quad (5-42)$$

$$S_E^{IFS}(A_i, A_j) = \frac{2\tilde{D}_i \tilde{D}_j}{\|\tilde{D}_i\|_2^2 + \|\tilde{D}_j\|_2^2} = \frac{2 \sum_{k=1}^m \tilde{d}_{ik} \tilde{d}_{jk}}{\sum_{k=1}^m \tilde{d}_{ik}^2 + \sum_{k=1}^m \tilde{d}_{jk}^2}, \quad (5-43)$$

$$S_C^{IFS}(A_i, A_j) = \frac{\tilde{D}_i \tilde{D}_j}{\|\tilde{D}_i\|_2 \|\tilde{D}_j\|_2} = \frac{\sum_{k=1}^m \tilde{d}_{ik} \tilde{d}_{jk}}{\sqrt{\sum_{k=1}^m \tilde{d}_{ik}^2} \sqrt{\sum_{k=1}^m \tilde{d}_{jk}^2}}. \quad (5-44)$$

由(5-35)-(5-36)拓展得到方案集的正理想方案和负理想方案为:

$$A_P = \{ \langle C_j, \mu_{A^+}(C_j), \nu_{A^+}(C_j) \rangle \mid C_j \in C \}, \quad i = 1, 2, \dots, p; \quad (5-45)$$

$$A_N = \{ \langle C_j, \mu_{A^-}(C_j), \nu_{A^-}(C_j) \rangle \mid C_j \in C \}, \quad i = 1, 2, \dots, p. \quad (5-46)$$

其中,

$$\mu_{A^+}(C_j) = \max_i \{ \mu_{A_i}(C_j) \}, \quad i = 1, 2, \dots, p, \quad j = 1, 2, \dots, n;$$

$$\nu_{A^+}(C_j) = \min_i \{ \nu_{A_i}(C_j) \}, \quad i = 1, 2, \dots, p, \quad j = 1, 2, \dots, n;$$

$$\mu_{A^-}(C_j) = \min_i \{ \mu_{A_i}(C_j) \}, \quad i = 1, 2, \dots, p, \quad j = 1, 2, \dots, n;$$

$$\nu_{A^-}(C_j) = \max_i \{ \nu_{A_i}(C_j) \}, \quad i = 1, 2, \dots, p, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

由 (5-42) - (5-44), 定义方案 A_i 的相对相似度 R_i 为:

$$JR_i = \frac{S_J^{IFS}(A_P, A_i)}{\frac{1}{2}(S_J^{IFS}(A_P, A_i) + S_J^{IFS}(A_N, A_i))}, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad (5-47)$$

$$ER_i = \frac{S_E^{IFS}(A_P, A_i)}{\frac{1}{2}(S_E^{IFS}(A_P, A_i) + S_E^{IFS}(A_N, A_i))}, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad (5-48)$$

$$CR_i = \frac{S_C^{IFS}(A_P, A_i)}{\frac{1}{2}(S_C^{IFS}(A_P, A_i) + S_C^{IFS}(A_N, A_i))}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (5-49)$$

5.5.3 基于得分矢量相似度的模糊多属性大群决策方法

在这一节，我们提出模糊多属性大群体决策方法，假设群体各个成员的权重是已知的。

设 $A = \{A_1, A_2, \dots, A_p\}$ 是决策问题的方案集， $C = \{C_1, C_2, \dots, C_n\}$ 是该决策问题的属性集， $G = \{G_1, G_2, \dots, G_m\}$ 是 m 个专家构成决策专家集，那么专家 G_j 的关于方案 A_i 的直觉模糊偏好值为：

$$v_i^j = \{ \langle C_1, \mu_{A_i}^j(C_1), \nu_{A_i}^j(C_1) \rangle, \langle C_2, \mu_{A_i}^j(C_2), \nu_{A_i}^j(C_2) \rangle, \dots, \langle C_n, \mu_{A_i}^j(C_n), \nu_{A_i}^j(C_n) \rangle \},$$

这里， $i = 1, 2, \dots, p, j = 1, 2, \dots, m$ 。其中， $\mu_{A_i}(C_k)$ 表示方案 A_i 满足属性 C_k 的隶属度， $\nu_{A_i}(C_k)$ 表示方案 A_i 满足属性 C_k 的非隶属度。称 $V^j = (v_1^j, v_2^j, \dots, v_n^j)$ 是专家 G_j 的直觉模糊偏好矢量，那么该直觉模糊大群体决策问题的决策过程包括以下几个步骤。

步骤1 由公式 (5-45) - (5-46)，可求得方案集的正理想方案和负理想方案分别为 A_P 和 A_N 。

步骤2 由 (5-38) 可以得到各方案 A_i 的得分矢量，把 n 个得分矢量组成如下矩阵，记为 $T_i (i = 1, 2, \dots, n)$ ，

$$T_i = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \dots & t_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ t_{p1} & t_{p2} & \dots & t_{pn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_{A_1}^1(C_1) - \nu_{A_1}^1(C_1) & \mu_{A_1}^1(C_2) - \nu_{A_1}^1(C_2) & \dots & \mu_{A_1}^1(C_n) - \nu_{A_1}^1(C_n) \\ \mu_{A_2}^2(C_1) - \nu_{A_2}^2(C_1) & \mu_{A_2}^2(C_2) - \nu_{A_2}^2(C_2) & \dots & \mu_{A_2}^2(C_n) - \nu_{A_2}^2(C_n) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mu_{A_p}^l(C_1) - \nu_{A_p}^l(C_1) & \mu_{A_p}^l(C_2) - \nu_{A_p}^l(C_2) & \dots & \mu_{A_p}^l(C_n) - \nu_{A_p}^l(C_n) \end{pmatrix}.$$

步骤3 把矩阵 T_i 标准化可得到，

$$\tilde{t}(i, j) = \frac{t(i, j) - T_1(i)}{T_2(i) - T_1(i)}, \tag{5-50}$$

其中， $T_1(i) = \min \{t_{i1}, t_{i2}, \dots, t_{in}\}$ ， $T_2(i) = \max \{t_{i1}, t_{i2}, \dots, t_{in}\}$ 。 $T_1(i)$ 是矩阵 T_i 第 i 列中最小的元素， $T_2(i)$ 是矩阵第 i 列中最大的元素， $i = 1, 2, \dots, l$ 。那么标准化后的矩阵为 $\tilde{T}_i = (\tilde{t}(i, j))_{p \times n}$ 。

步骤4 设 $W = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ 是 p 个决策专家的权重矢量, 那么方案 A_i 的群体偏好矢量为:

$$\begin{aligned}
 U_i &= W' \tilde{T}_i = (w_1, w_2, \dots, w_m) \begin{pmatrix} \tilde{t}_{11} & \tilde{t}_{12} & \dots & \tilde{t}_{1n} \\ \tilde{t}_{21} & \tilde{t}_{22} & \dots & \tilde{t}_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \tilde{t}_{m1} & \tilde{t}_{m2} & \dots & \tilde{t}_{mn} \end{pmatrix} \\
 &= (u_i^1, u_i^2, \dots, u_i^n). \tag{5-51}
 \end{aligned}$$

步骤5 由 (5-40) - (5-41) 可得到正理想方案和负理想方案的标准化得分矢量分别为 D_P 和 D_N 。

步骤6 由公式(5-42)-(5-44)和(5-47)-(5-49), 可计算得到方案 $A_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 的相对相似度, 根据最大原则, 那么最优方案由下面的公式确定。

$$o_J = \max_{1 \leq i \leq n} \{JR_i\}, \quad o_E = \max_{1 \leq i \leq n} \{ER_i\}, \quad o_C = \max_{1 \leq i \leq n} \{CR_i\}. \tag{5-52}$$

在下一节, 将把本节的方法解决模糊多属性大群体决策问题, 我们将给出两个实例来讨论本节的方法。

5.5.4 模糊偏好多属性大群体应急决策案例分析

以某核电站PWR5事故源项下放射性物质释放为例, 对应急情况下的决策作出计算分析和决断。通过预计剂量和可避免剂量的计算以及对40km 内的人口数量统计, 得出以下5 种备选应急方案: (1) A_1 不采取任何措施; (2) A_2 在周围25km 内实施隐蔽并发放碘片, 服食碘片和隐蔽总人数将达到11. 7 万人; (3) A_3 烟云到来前预防性撤离11 km 之内的人群, 11~25 km 的就地隐蔽, 并发放碘片。撤离人口为1 万, 隐蔽、服碘人数达到1万; (4) A_4 隐蔽范围如方案2, 发放碘片的范围包括所有受影响的地区, 隐蔽人数达到12 万人, 服碘人数达到70万人; (5) A_5 先隐蔽, 在烟羽经过后, 撤离20km 内的所有人, 在烟羽经过的过程中提供隐蔽和发放碘片, 撤离人口数达到7.4 万人, 影响人数达到80万人。决策目的是从这五个方案 $A = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5\}$ 中挑选出最好的方案, 该处理小组邀请5个专家对上述五个方案从以下四个属性(评价准则) 考量: (1) C_1 : 经济损失; (2) C_2 : 人员伤亡及影响人数; (3) C_3 : 可操作性; (4) C_4 : 时间。各个方案的模糊偏好矢量如表5-2所示。

步骤1 由公式 (5-45) - (5-46) 可求得方案集的正理想方案和负理想方案的

表 5-2 5个专家对5个方案的模糊偏好矢量表

<i>A</i>	<i>M</i>	C_1	C_2	C_3	C_4
A_1	1	$\langle 0.05, 0.09 \rangle$	$\langle 0.29, 0.30 \rangle$	$\langle 0.08, 0.46 \rangle$	$\langle 0.13, 0.05 \rangle$
	2	$\langle 0.27, 0.36 \rangle$	$\langle 0.07, 0.29 \rangle$	$\langle 0.46, 0.30 \rangle$	$\langle 0.06, 0.33 \rangle$
	3	$\langle 0.31, 0.05 \rangle$	$\langle 0.41, 0.07 \rangle$	$\langle 0.32, 0.35 \rangle$	$\langle 0.18, 0.22 \rangle$
	4	$\langle 0.24, 0.44 \rangle$	$\langle 0.25, 0.27 \rangle$	$\langle 0.10, 0.22 \rangle$	$\langle 0.49, 0.27 \rangle$
	5	$\langle 0.17, 0.46 \rangle$	$\langle 0.33, 0.25 \rangle$	$\langle 0.34, 0.47 \rangle$	$\langle 0.41, 0.36 \rangle$
A_2	1	$\langle 0.41, 0.16 \rangle$	$\langle 0.36, 0.17 \rangle$	$\langle 0.40, 0.26 \rangle$	$\langle 0.44, 0.46 \rangle$
	2	$\langle 0.37, 0.20 \rangle$	$\langle 0.03, 0.44 \rangle$	$\langle 0.48, 0.28 \rangle$	$\langle 0.20, 0.41 \rangle$
	3	$\langle 0.81, 0.12 \rangle$	$\langle 0.63, 0.27 \rangle$	$\langle 0.76, 0.03 \rangle$	$\langle 0.70, 0.27 \rangle$
	4	$\langle 0.09, 0.69 \rangle$	$\langle 0.39, 0.11 \rangle$	$\langle 0.03, 0.38 \rangle$	$\langle 0.18, 0.44 \rangle$
	5	$\langle 0.70, 0.27 \rangle$	$\langle 0.65, 0.11 \rangle$	$\langle 0.67, 0.12 \rangle$	$\langle 0.49, 0.34 \rangle$
A_3	1	$\langle 0.22, 0.25 \rangle$	$\langle 0.54, 0.14 \rangle$	$\langle 0.61, 0.13 \rangle$	$\langle 0.25, 0.25 \rangle$
	2	$\langle 0.24, 0.35 \rangle$	$\langle 0.25, 0.47 \rangle$	$\langle 0.38, 0.56 \rangle$	$\langle 0.01, 0.33 \rangle$
	3	$\langle 0.16, 0.79 \rangle$	$\langle 0.31, 0.52 \rangle$	$\langle 0.16, 0.60 \rangle$	$\langle 0.26, 0.65 \rangle$
	4	$\langle 0.45, 0.08 \rangle$	$\langle 0.15, 0.82 \rangle$	$\langle 0.07, 0.44 \rangle$	$\langle 0.06, 0.96 \rangle$
	5	$\langle 0.04, 0.77 \rangle$	$\langle 0.08, 0.39 \rangle$	$\langle 0.18, 0.26 \rangle$	$\langle 0.14, 0.13 \rangle$
A_4	1	$\langle 0.54, 0.14 \rangle$	$\langle 0.35, 0.51 \rangle$	$\langle 0.40, 0.07 \rangle$	$\langle 0.23, 0.12 \rangle$
	2	$\langle 0.18, 0.24 \rangle$	$\langle 0.41, 0.04 \rangle$	$\langle 0.49, 0.48 \rangle$	$\langle 0.36, 0.11 \rangle$
	3	$\langle 0.24, 0.40 \rangle$	$\langle 0.09, 0.13 \rangle$	$\langle 0.57, 0.05 \rangle$	$\langle 0.23, 0.35 \rangle$
	4	$\langle 0.82, 0.01 \rangle$	$\langle 0.03, 0.73 \rangle$	$\langle 0.64, 0.35 \rangle$	$\langle 0.54, 0.29 \rangle$
	5	$\langle 0.74, 0.18 \rangle$	$\langle 0.68, 0.18 \rangle$	$\langle 0.36, 0.62 \rangle$	$\langle 0.78, 0.08 \rangle$
A_5	1	$\langle 0.92, 0.00 \rangle$	$\langle 0.48, 0.43 \rangle$	$\langle 0.44, 0.30 \rangle$	$\langle 0.50, 0.41 \rangle$
	2	$\langle 0.81, 0.09 \rangle$	$\langle 0.64, 0.31 \rangle$	$\langle 0.35, 0.63 \rangle$	$\langle 0.20, 0.30 \rangle$
	3	$\langle 0.47, 0.23 \rangle$	$\langle 0.74, 0.19 \rangle$	$\langle 0.22, 0.17 \rangle$	$\langle 0.22, 0.43 \rangle$
	4	$\langle 0.03, 0.92 \rangle$	$\langle 0.43, 0.18 \rangle$	$\langle 0.43, 0.11 \rangle$	$\langle 0.25, 0.40 \rangle$
	5	$\langle 0.59, 0.26 \rangle$	$\langle 0.22, 0.11 \rangle$	$\langle 0.29, 0.31 \rangle$	$\langle 0.42, 0.50 \rangle$

直觉模糊偏好矢量为:

$$A_P = \{ \langle C_1, 0.9294, 0.0057 \rangle, \langle C_2, 0.7443, 0.0078 \rangle, \langle C_3, 0.7690, 0.0598 \rangle, \langle C_4, 0.7802, 0.0504 \rangle \};$$

$$A_N = \{ \langle C_1, 0.0046, 0.9234 \rangle, \langle C_2, 0.0430, 0.8358 \rangle, \langle C_3, 0.0782, 0.6390 \rangle, \langle C_4, 0.0119, 0.9616 \rangle \}.$$

步骤2 由(5-38), 可求得五个方案的矩阵分别为:

$$T_1 = \begin{pmatrix} -0.0372 & -0.0349 & -0.3838 & 0.0853 \\ -0.1076 & -0.2081 & 0.1074 & -0.2745 \\ 0.2637 & 0.4093 & 0.0393 & -0.0471 \\ -0.2044 & -0.0198 & -0.1259 & 0.2216 \\ -0.2964 & 0.0723 & -0.1257 & 0.0524 \end{pmatrix},$$

$$T_2 = \begin{pmatrix} 0.2564 & 0.1867 & 0.1438 & -0.0225 \\ 0.1713 & -0.4084 & 0.2017 & -0.2159 \\ 0.6877 & 0.3539 & 0.7333 & 0.4291 \\ -0.5977 & 0.2210 & -0.3472 & -0.2587 \\ 0.4334 & 0.5361 & 0.5171 & 0.1580 \end{pmatrix},$$

$$T_3 = \begin{pmatrix} -0.0313 & 0.3979 & 0.4774 & 0.0032 \\ -0.1065 & -0.2222 & -0.1874 & -0.3252 \\ -0.6321 & -0.2173 & -0.4364 & -0.3911 \\ 0.3667 & -0.6734 & -0.3645 & -0.9552 \\ -0.7703 & -0.3154 & -0.0820 & 0.0094 \end{pmatrix},$$

$$T_4 = \begin{pmatrix} 0.4049 & -0.1622 & 0.3258 & 0.1166 \\ -0.0561 & 0.3676 & 0.0016 & 0.2580 \\ -0.1622 & -0.0355 & 0.5154 & -0.1184 \\ 0.8058 & -0.6887 & 0.2968 & 0.2507 \\ 0.5557 & 0.5033 & -0.2571 & 0.6991 \end{pmatrix},$$

$$T_5 = \begin{pmatrix} 0.9237 & 0.0509 & 0.1405 & 0.0977 \\ 0.7228 & 0.3257 & -0.2883 & -0.0935 \\ 0.2404 & 0.5495 & 0.0552 & -0.2080 \\ -0.8923 & 0.2454 & 0.3278 & -0.1506 \\ 0.3327 & 0.1043 & -0.0221 & -0.0837 \end{pmatrix}.$$

步骤3 根据公式 (5-50) 可求得五个方案的标准化得分矢量, 组成标准化的矩阵为:

$$\tilde{T}_1 = \begin{pmatrix} 0.7389 & 0.7438 & 0.0000 & 1.0000 \\ 0.4370 & 0.1739 & 1.0000 & 0.0000 \\ 0.6810 & 1.0000 & 0.1893 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.4333 & 0.1843 & 1.0000 \\ 0.0000 & 1.0000 & 0.4630 & 0.9460 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{T}_2 = \begin{pmatrix} 1.0000 & 0.7501 & 0.5963 & 0.0000 \\ 0.9502 & 0.0000 & 1.0000 & 0.3155 \\ 0.8798 & 0.0000 & 1.0000 & 0.1982 \\ 0.0000 & 1.0000 & 0.3060 & 0.4141 \\ 0.7284 & 1.0000 & 0.9497 & 0.0000 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{T}_3 = \begin{pmatrix} 0.0000 & 0.8437 & 1.0000 & 0.0678 \\ 1.0000 & 0.4710 & 0.6301 & 0.0000 \\ 0.0000 & 1.0000 & 0.4718 & 0.5810 \\ 1.0000 & 0.2132 & 0.4469 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.5834 & 0.8828 & 1.0000 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{T}_4 = \begin{pmatrix} 1.0000 & 0.0000 & 0.8605 & 0.4916 \\ 0.0000 & 1.0000 & 0.1362 & 0.7413 \\ 0.0000 & 0.1870 & 1.0000 & 0.0646 \\ 1.0000 & 0.0000 & 0.6594 & 0.6286 \\ 0.8500 & 0.7952 & 0.0000 & 1.0000 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{T}_5 = \begin{pmatrix} 1.0000 & 0.0000 & 0.1027 & 0.0536 \\ 1.0000 & 0.6073 & 0.0000 & 0.1927 \\ 0.5919 & 1.0000 & 0.3475 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.9325 & 1.0000 & 0.6079 \\ 1.0000 & 0.4515 & 0.1479 & 0.0000 \end{pmatrix}.$$

步骤4 已知五个决策专家的权重矢量为 $W' = (0.1, 0.3, 0.2, 0.3, 0.1)$ ，由公式 (5-51) 求得五个方案的群体得分矢量为：

$$U_1 = (0.3412, 0.5999, 0.4579, 0.5946); U_2 = (0.6339, 0.5750, 0.7770, 0.2999);$$

$$U_3 = (0.7000, 0.5693, 0.6504, 0.2230); U_4 = (0.5850, 0.4169, 0.5907, 0.6359);$$

$$U_5 = (0.6184, 0.8003, 0.4946, 0.3063).$$

步骤5 由公式 (5-41) 把正理想方案的得分矢量和负理想方案的得分矢量标准化得

$$D_P = (1.0000, 0.1273, 0, 0.0960); D_N = (0.0795, 0.4034, 1.0000, 0).$$

步骤6 由公式(5-42)-(5-44)和(5-47)-(5-49)，可计算得到方案 $A_i (i = 1, 2, \dots, 5)$ 的J-相似度、E-相似度和C-相似度以及相对相似度，结果见表5-3。

表 5-3 基于直觉模糊集得分矢量间的三种相似度的决策结果

	S_J^{IFSP}	S_J^{IFSN}	JR	S_E^{IFSP}	S_E^{IFSN}	ER	S_C^{IFSP}	S_C^{IFSN}	CR
A_1	0.298	0.490	0.117	0.229	0.329	0.064	0.459	0.659	0.257
A_2	0.428	0.689	0.239	0.300	0.408	0.106	0.608	0.820	0.434
A_3	0.522	0.615	0.297	0.343	0.381	0.124	0.691	0.762	0.502
A_4	0.438	0.493	0.204	0.340	0.330	0.096	0.612	0.661	0.390
A_5	0.457	0.520	0.224	0.314	0.342	0.103	0.634	0.686	0.419
Best			A_3			A_3			A_3

从表5-3中可以看出三种相似度的决策结果一致，最优方案为 A_3 ，这表明本文基于直觉模糊集的得分矢量相似度的大群体决策方法是有效的。

为了更好验证本节方法的有效性，即：说明相对相似度的定义是合理的，给出三种相对相似度的曲线，如图5-1、图5-2和图5-3。

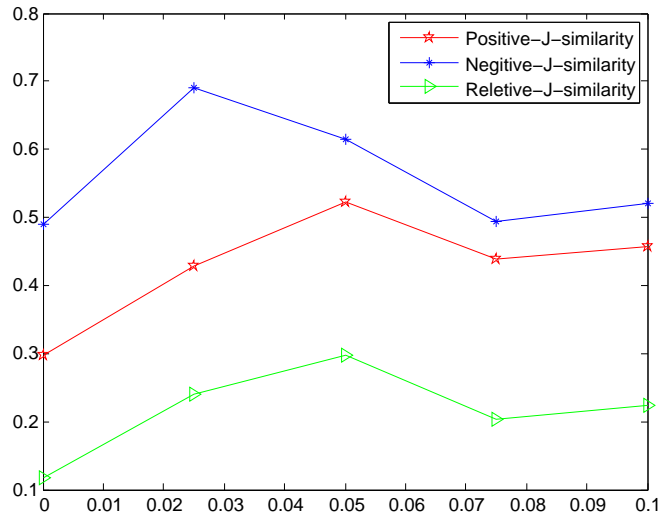


图 5-1 J-相对相似度曲线

从上面的相似度曲线图可以很容易的选出最优方案，五个方案 A_i ($i = 1, 2, \dots, 5$)的相对相似度接近五个方案 A_i ($i = 1, 2, \dots, 5$)与正理想方案的相似度，因此基于相对相似度的决策方法是科学的、有效的、合理的。

5.5.5 与其他方法比较

为了进一步验证本节提出的基于直觉模糊集得分矢量间的相似度的多属性决策方法的有效性，将讨论专家个数为1时的大群体决策问题（即：多属性大群体决策问题），利用文献^[98]和文献^[117]的案例。

设某个城市准备修建一个公共图书馆，该城市决策委员会所面临的一个重要的问题是选择何种空调系统安装在公共图书馆里面。空调供应商考虑图书馆

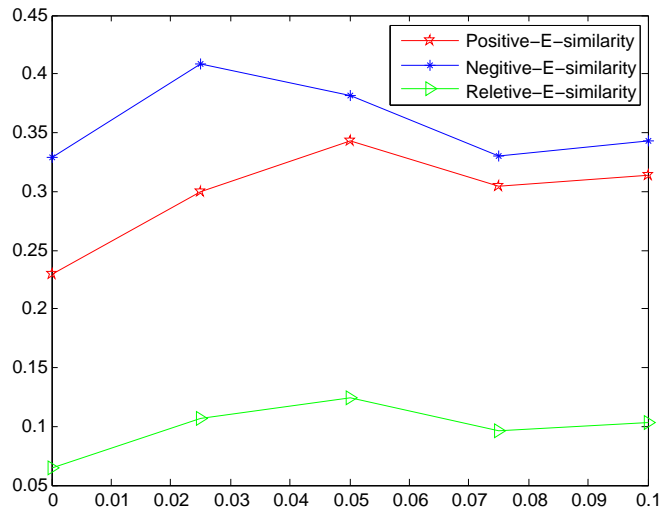


图 5-2 E-相对相似度曲线

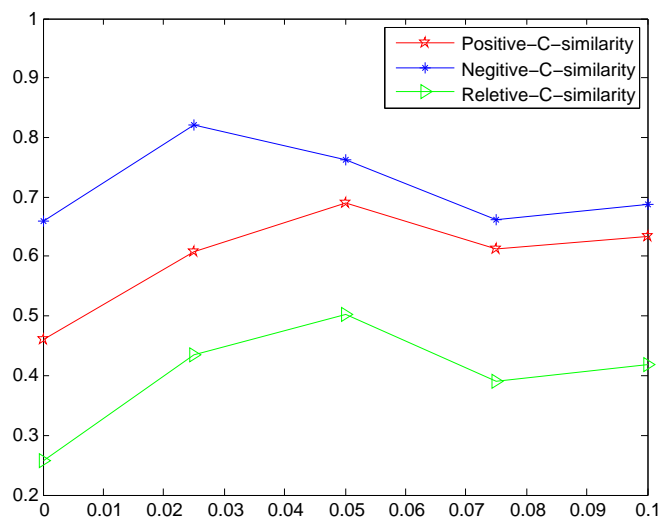


图 5-3 C-相对相似度曲线

的物理结构, 为决策委员会提供了五种可行的方案 A_i ($i = 1, 2, \dots, 5$), 建设决策委员会要从以下三个属性方面进行评判: (1) C_1 价格; (2) C_2 是功能; (3) C_3 是操作性。五个方案 A_i ($i = 1, 2, \dots, 5$) 用下面的直觉模糊集表示。

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \{ \langle C_1, 0.2, 0.4 \rangle, \langle C_2, 0.7, 0.1 \rangle, \langle C_3, 0.6, 0.3 \rangle \}; \\
 A_2 &= \{ \langle C_1, 0.4, 0.2 \rangle, \langle C_2, 0.5, 0.2 \rangle, \langle C_3, 0.8, 0.1 \rangle \}; \\
 A_3 &= \{ \langle C_1, 0.5, 0.4 \rangle, \langle C_2, 0.6, 0.2 \rangle, \langle C_3, 0.9, 0.0 \rangle \}; \\
 A_4 &= \{ \langle C_1, 0.3, 0.5 \rangle, \langle C_2, 0.8, 0.1 \rangle, \langle C_3, 0.7, 0.2 \rangle \}; \\
 A_5 &= \{ \langle C_1, 0.8, 0.2 \rangle, \langle C_2, 0.7, 0.0 \rangle, \langle C_3, 0.1, 0.6 \rangle \}.
 \end{aligned}$$

利用公式 (5-45) 和 (5-46), 首先计算方案集 A_i ($i = 1, 2, \dots, 5$)的正理想方

案 A_P 和负理想方案 A_N 分别为:

$$A_P = \{ \langle C_1, 0.8, 0.2 \rangle, \langle C_2, 0.8, 0.0 \rangle, \langle C_3, 0.9, 0.0 \rangle \};$$

$$A_N = \{ \langle C_1, 0.2, 0.5 \rangle, \langle C_2, 0.5, 0.2 \rangle, \langle C_3, 0.1, 0.6 \rangle \}.$$

分别求出方案 A_i ($i = 1, 2, \dots, 5$)、正理想方案 A_P 和负理想方案 A_N 的得分矢量如下:

$$D_1 = (0.0, 1.0, 0.6); D_2 = (0.0, 0.2, 1.0); D_3 = (0.0, 0.4, 1.0);$$

$$D_4 = (0.0, 1.0, 0.8); D_5 = (0.9, 1.0, 0.0); D_P = (0.0, 0.7, 1.0);$$

$$D_N = (0.3, 1.0, 0.0).$$

由公式(5-42)-(5-44)和(5-47)-(5-49), 可计算得到方案 A_i ($i = 1, 2, \dots, 5$)的J-相对相似度、E-相对相似度和C-相对相似度:

$$JR_1 = 0.5566, JR_2 = \mathbf{0.8843}, JR_3 = 0.8161, JR_4 = 0.6066, JR_5 = 0.2732;$$

$$ER_1 = 0.5320, ER_2 = \mathbf{0.8240}, ER_3 = 0.7368, ER_4 = 0.5617, ER_5 = 0.3382;$$

$$CR_1 = 0.5301, CR_2 = \mathbf{0.8267}, CR_3 = 0.7388, CR_4 = 0.5566, CR_5 = 0.3308.$$

由最大原则, 可知最优方案是 A_2 , 并且三种相似度的决策结果是一致的。

从上面的两个案例讨论, 可以看出本节的方法不仅可以解决模糊偏好下多属性大群体决策问题, 也可以解决模糊偏好下多属性决策问题, 考虑了决策专家的权重, 使得本节的方法更适用更有效地解决模糊环境下的多属性复杂大群体决策问题。

5.6 本章小结

相似度在模糊集比较方面有较大的优势, 被广泛应用各个领域。本章在分析现有参考文献相似度的不足之处, 提出了一种新的E-相似度方法, 在它的基础上改进提出了变系数相似度, 并证明它们满足相似度所具有的性质, 揭示它们与其它相似度之间的关系。用一些数值例子, 将本章的方法与现有参考文献的相似度进行比较, 从数值结果表中可以看出本章方法的合理性。为了进一步说明, 把本章方法和文献的方法去解决模糊多属性决策问题, 文献^[31]的方法不能选出最优方案, 而本章的两种方法都有很强的识别性。最后, 把本章的方法应用解模糊模式识别问题、模糊医学诊断问题和模糊多属性决策问题, 更进一步验证了本章方法的实用性和广泛的应用性。

考虑到决策成员增多时,传统的群决策方法适用性不强,提出了基于直觉模糊集得分矢量间相似度的多属性大群体决策方法,通过两个案例(模糊多属性大群体决策案例和模糊多属性决策案例)讨论本章方法的适用性,三种相似度决策结果一致,验证了基于直觉模糊集得分矢量间相似度的多属性群决策方法的有效性。

6 基于模糊数偏好的多属性大群体决策方法

在本章以及下一章,我们研究基于模糊数及其拓展形似(直觉模糊数^[50]、区间直觉模糊数^[51]、三角模糊数^[52]、参数型直觉三角模糊数^[53]、区间三角模糊数^[54]、梯形模糊数^{[34],[55]}、参数型直觉梯形模糊数^[41]、区间梯形模糊数^[38])型偏好之间的相似度,并基于相似度模型提出模糊偏好下大群体决策方法。

6.1 模糊数及其拓展形式

6.1.1 引言

相对于人类思维的复杂性以及客观事物的不确定性和模糊性,用模糊数表示决策事物的偏好信息,更能客观准确地刻画决策事物的性质^[118]。模糊决策理论作为现代决策理论的一个重要分支,被广泛应用于经济管理、社会学、军事学、公共管理等。Zadeh在1965年首次提出模糊集^[20]理论,成为国内外学者研究的热点。保加利亚学者Atanassov在模糊集理论的基础上提出直觉模糊集的概念^[25],其特点是同时考虑隶属度与非隶属度两个方面的信息,较传统的模糊集在处理不确定信息时,具有更强的表现能力。随后,国内外学者对直觉模糊集进行了拓展,目前关于它的拓展形式主要有区间直觉模糊数、三角模糊数、三角直觉模糊数等。文献^[39]把直觉模糊集拓展到直觉梯形模糊数,并提出其运算法则,在文献^[39]基础上,Liu提出了区间直觉梯形模糊数^[37],上述两种方法把模糊集从离散集合扩展到连续集合。另一方面,Bellman和Zadeh,在1970首次提出了模糊决策问题的基础模型^[43],为模糊决策理论奠定了基础。在以后几十年,关于模糊决策问题的方法层出不穷,例如,加权平均算子、几何平均算子、TOPSIS方法、层次分析法、灰色理论分析法和相似度方法等。在不确定信息和模糊信息比较方面,相似度是一种常用的测量工具,它是度量两个模糊集相似性的重要工具。许多学者对于两个模糊集的相似度提出了很多方法,主要有两大类方法:一是基于两个模糊集距离基础上构建两模糊集的相似度,包括Hamming距离相似度^[119]、Hausdorff距离相似度^[29]、Euclidean距离相似度^[98],以及由数学中距离模型拓展得到的相似度;另一类方法把模糊集看成一矢量,利用矢量空间已有的模型构造两模糊集的相似度,如Cosine相似度^[31]。这些方法有较强的实用性,被广泛应用解决各种问题,包括模糊模式识别、模糊线性规划、医学诊断、模糊任务分配,以及模糊多属性决问题等。

6.1.2 模糊数、直觉模糊数和区间直觉模糊数

在这一节我们只列举模糊数、直觉模糊数和区间直觉模糊数的概念,在下

面的几节将详细的讨论模糊数的拓展形式(三角模糊数、参数型直觉三角模糊数、梯形模糊数、区间梯形模糊数、直觉梯形模糊数)。

定义6.1 设 α 是实数集 R 上的模糊数,其隶属函数^[118]定义如下:

$$\mu_{\alpha}(x) = \begin{cases} 0, & x < a_1, \\ f_{\alpha}(x), & a_1 \leq x \leq a_2, \\ 1, & a_2 < x < a_3, \\ g_{\alpha}(x), & a_3 \leq x \leq a_4, \\ 0, & a_4 < x, \end{cases} \quad (6-1)$$

其中 $a_1, a_2, a_3, a_4 \in R, f_{\alpha}(x) : [a_1, a_2] \rightarrow [0, 1]$ 定义域上的不减函数,称作模糊数的左边界。 $g_{\alpha}(x) : [a_3, a_4] \rightarrow [0, 1]$ 称为模糊数的右边界,是定义域上的不减函数。

Grzegorewski在文献^[120]拓展了Dubois和Prade定义的模糊数理论^[118],把仅考虑隶属函数的传统模糊数推广到同时考虑隶属函数、非隶属函数这两个方面的直觉模糊数,其定义如下:

定义6.2 设 α 是实数集 R 上的直觉模糊数,其隶属函数和非隶属函数分别定义如下:

$$\mu_{\alpha}(x) = \begin{cases} 0, & x < a_1, \\ f_{\alpha}(x), & a_1 \leq x \leq a_2, \\ 1, & a_2 < x < a_3, \\ g_{\alpha}(x), & a_3 \leq x \leq a_4, \\ 0, & a_4 < x, \end{cases} \quad (6-2)$$

$$\nu_{\alpha}(x) = \begin{cases} 0, & x < b_1, \\ h_{\alpha}(x), & b_1 \leq x \leq b_2, \\ 1, & b_2 < x < b_3, \\ k_{\alpha}(x), & b_3 \leq x \leq b_4, \\ 0, & b_4 < x, \end{cases} \quad (6-3)$$

其中 $0 \leq \mu_{\alpha}(x) + \nu_{\alpha}(x) \leq 1$,且 $a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, b_3, b_4 \in R$,并满足 $b_1 \leq a_1 \leq b_2 \leq a_2 \leq b_3 \leq a_3 \leq a_4 \leq b_4$ 。四个函数 $f_{\alpha}(x), g_{\alpha}(x), h_{\alpha}(x), k_{\alpha}(x) : R \rightarrow [0, 1]$ 称为模糊数的边界。函数 $f_{\alpha}(x), k_{\alpha}(x)$ 是定义域上的不减函数,而 $g_{\alpha}(x), h_{\alpha}(x)$ 是定义域上的不减函数。

文献^[121]给出了如何把直觉模糊集转为区间直觉模糊集(Interval-values Intuitionistic fuzzy set, IVFS)的方法,设 α 是集合 $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ 上的直觉模糊集,则 α 的区间直觉模糊集为:

$$IVFS(\alpha) = \{x_i, [\mu_{\alpha}(x_i), \mu_{\alpha}(x_i) + \pi_{\alpha}(x_i)] \mid x_i \in X\}. \quad (6-4)$$

徐泽水在文献^[122]定义了直觉模糊数的概念, X 中元素 x 属于 X 的隶属区间 $\mu_\alpha(x)$ 和非隶属区间 $\nu_\alpha(x)$ 所组成的有序区间对 $(\mu_\alpha(x), \nu_\alpha(x))$ 称为区间直觉模糊数。徐泽水和陈剑^[123]给出了区间直觉模糊数的运算法则可定义如下:

定义6.3 设 $\alpha_1 = ([a_1, b_1], [c_1, d_1])$ 和 $\alpha_2 = ([a_2, b_2], [c_2, d_2])$ 为任意的两个区间直觉模糊数, 则运算法则为:

$$\begin{aligned} (1) \overline{\alpha_1} &= ([c_1, d_1], [a_1, b_1]); \\ (2) \alpha_1 + \alpha_2 &= ([a_1 + a_2 - a_1 a_2, b_1 + b_2 - b_1 b_2], [c_1 c_2, d_1 d_2]); \\ (3) \alpha_1 \alpha_2 &= ([a_1 a_2, b_1 b_2], [c_1 + c_2 - c_1 c_2, d_1 + d_2 - d_1 d_2]); \\ (4) \lambda \alpha_1 &= ([1 - (1 - a_1)^\lambda, 1 - (1 - b_1)^\lambda], [c_1^\lambda, d_1^\lambda]). \end{aligned}$$

上述给出的四种运算法则的结果仍是区间直觉模糊数, 且有下列等式成立:

$$\begin{aligned} (1) \alpha_1 + \alpha_2 &= \alpha_2 + \alpha_1; \\ (2) \alpha_1 \alpha_2 &= \alpha_2 \alpha_1; \\ (3) \lambda(\alpha_1 + \alpha_2) &= \lambda \alpha_1 + \lambda \alpha_2, \lambda \geq 0; \\ (4) \lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_1 &= (\lambda_1 + \lambda_2) \alpha_1, \lambda_1, \lambda_2 \geq 0. \end{aligned}$$

6.2 基于三角模糊数偏好的多属性大群体决策方法

三角模糊数是模糊数的拓展形式之一, 因为三角模糊数在模糊环境下有直观性、计算简单、容易使用以及可有效提高模糊数的表达和模糊信息处理等优势, 并广泛应用各个领域。最常见的是解决模糊多属性决策问题, 在这种情况下其属性值采用语言值(可转化为三角模糊数)表示, 语言值是表达模糊信息的有效工具^{[124]-[126]}。国内外许多学者对三角模糊数做了大量的研究, Fu基于理想点和反理想点提出了一种模糊优化方法^[127]来解决三角模糊数多属性决策问题, 给出一水库防洪调度案例来证明他的方法是有效的。Wei给出模糊诱导有序加权平均算子^[128]来解决三角模糊多属性决策问题中的方案排序问题, 在文献^[129]中Wei等人给出属性值是三角模糊数的多属性决策问题的描述, 并提出了广义的三角模糊关联平均算子, 数值结果表明该算子是有效的, 可实用的。徐泽水在文献^[32]中研究了决策者对决策方案有偏好、决策属性值用三角模糊数表示、决策属性的权重信息是未知的多属性决策问题, 并给出了一种基于相似度的对方案有偏好的三角模糊数型多属性决策方法。但上面的文献中的方法是建立在群决策问题的属性权重是未知的以及决策成员的权重信息也是未知的, 且决策成员个数为1。但是, 在一些实际的复杂大群体决策问题中, 属性权重和决策成员权重信息是重要的一部分, 因此考虑参考文献中方法的缺点, 我们在下面的小节中构建了基于三角模糊数偏好的多属性大群体决策方法, 其属性权重信息和决

策成员权重信息是已知的。本节其余部分的内容如下：给出三角模糊数的定义以及它的运算法则，三种三角模糊数之间的相似度的定义也给出。基于三角模糊数之间的相似度提出三角模糊偏好多属性大群体决策方法，为了说明本节方法的实用性和有效性，将在6.2.3节给出一案例，其数值结果表明本节方法的可行性。

6.2.1 三角模糊数及三角模糊数间的相似度

Laarhoven和Pedrycz在文献^[130]给出了广义的三角模糊数 α 的定义，如下：

定义6.4^[130] 设 α 是一个三角模糊数，其一般形式为 (a_1, a_2, a_3) ，那么三角模糊数 α 的隶属函数 $\mu_\alpha(x)$ 定义如下：

$$\mu_\alpha(x) = \begin{cases} 0, & x < a_1, \\ \frac{x-a_1}{a_2-a_1}, & a_1 \leq x \leq a_2, \\ \frac{x-a_3}{a_2-a_3}, & a_2 \leq x \leq a_3, \\ 0, & a_3 < x. \end{cases} \quad (6-5)$$

其中， $0 \leq a_1 \leq a_2 \leq a_3$ ， a_1 和 a_3 分别代表 α 的最小值和最大值， a_2 表示三角模糊数的中间值。为了直观的描述三角模糊数，我们给出它的隶属函数图形，如图6-1。

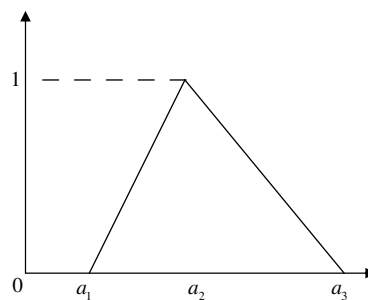


图 6-1 三角模糊数的隶属函数图形

设 $\alpha = (a_1, a_2, a_3)$ 和 $\beta = (b_1, b_2, b_3)$ 是实数集上的两个三角模糊数， γ 是任意的正实数，那么三角模糊数有如下的运算法则。

$$\begin{aligned} \alpha \oplus \beta &= (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3), \\ \alpha \otimes \beta &= (a_1 b_1, a_2 b_2, a_3 b_3), \\ \gamma \otimes \alpha &= (\gamma a_1, \gamma a_2, \gamma a_3), \\ \frac{1}{\alpha} &= \left(\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_3} \right). \end{aligned}$$

把三角模糊数 α 看成一个矢量，其三个参数是矢量的三个元素，借助于第二章给出的矢量空间的相似度，可以定义两个三角模糊数之间的相似度，见定义6.5。

定义6.5 设 $\alpha = (a_1, a_2, a_3)$ 和 $\beta = (b_1, b_2, b_3)$ 是实数集上的两个三角模糊数，并且 $0 \leq a_1 \leq a_2 \leq a_3$, $0 \leq b_1 \leq b_2 \leq b_3$ ，那么两个三角模糊数之间的相似度定义如下：

$$S^J(\alpha, \beta) = \frac{\sum_{i=1}^3 a_i b_i}{\sum_{i=1}^3 a_i^2 + \sum_{i=1}^3 b_i^2 - \sum_{i=1}^3 a_i b_i}, \quad (6-6)$$

$$S^E(\alpha, \beta) = \frac{2 \sum_{i=1}^3 a_i b_i}{\sum_{i=1}^3 a_i^2 + \sum_{i=1}^3 b_i^2}, \quad (6-7)$$

$$S^C(\alpha, \beta) = \frac{\sum_{i=1}^3 a_i b_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^3 a_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^3 b_i^2}}. \quad (6-8)$$

显然定义6.5给出的三种相似度满足下面的性质，

$$(1) \quad 0 \leq S(\alpha, \beta) \leq 1, \quad (6-9)$$

$$(2) \quad S(\alpha, \beta) = S(\beta, \alpha), \quad (6-10)$$

$$(3) \quad \alpha = \beta, a_i = b_i, i = 1, 2, 3. S(\alpha, \beta) = 1. \quad (6-11)$$

证明过程类似定理5.1的证明，这里不再赘述。

6.2.2 基于相似度的三角模糊偏好多属性群决策方法

在过去的几十年中，模糊数以及其拓展形式被广泛的应用到多属性决策问题，一些相关的多属性决策方法也被国内外研究者提出，例如：有序加权集中算子^[38] (ordered weighted aggregation operators, OWAO)、加权几何平均算子^[44] (weighted geometric aggregation operators, WGAO)、TOPSIS方法^{[45],[46],[131]}、层次分析法^[47] (analytic hierarchy process, AHP)、灰色关联分析法 (grey relational analysis method, GRA)^{[48],[132],[133]}、模糊优化法^{[134],[135]} (fuzzy optimization method, FOM)、相似度方法^{[136]-[141]} (similarity measures, SM) 等等。

设三角模糊数型的多属性群决策问题有 p 个方案、 n 个属性，其属性集为 $C = \{C_1, C_2, \dots, C_n\}$ ， $A = \{A_1, A_2, \dots, A_p\}$ 是该决策问题的方案集。假设我们

邀请 m 个专家对上述 p 个方案,从 n 个属性进行评价,设 $G = \{G_1, G_2, \dots, G_m\}$ 是该决策问题的专家集合。那么第 k 个专家 G_k 对第 i 个方案 A_i 的三角模糊型偏好矢量如下:

$$v_i^k = \{ \langle C_1, (a_{i11}^k, a_{i12}^k, a_{i13}^k) \rangle, \langle C_2, (a_{i21}^k, a_{i22}^k, a_{i23}^k) \rangle, \dots, \langle C_n, (a_{in1}^k, a_{in2}^k, a_{in3}^k) \rangle \},$$

其中, $i = 1, 2, \dots, p; k = 1, 2, \dots, m$.

设 m 个专家的权重矢量为: $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$, 那么对于每个方案 A_i , 它的三角模糊型群体偏好矢量由下面的公式计算得到。

$$U_i = \{ \langle C_1, (\sum_{k=1}^m \lambda_k a_{i11}^k, \sum_{k=1}^m \lambda_k a_{i12}^k, \sum_{k=1}^m \lambda_k a_{i13}^k) \rangle, \langle C_2, (\sum_{k=1}^m \lambda_k a_{i21}^k, \sum_{k=1}^m \lambda_k a_{i22}^k, \sum_{k=1}^m \lambda_k a_{i23}^k) \rangle, \dots, \langle C_n, (\sum_{k=1}^m \lambda_k a_{in1}^k, \sum_{k=1}^m \lambda_k a_{in2}^k, \sum_{k=1}^m \lambda_k a_{in3}^k) \rangle \}. \quad (6-12)$$

Heilpern在文献^[142]提出了模糊数的期望值定义,被广泛应用于确定多属性决策问题中决策属性权重的确定,对于不同的属性 C_j ($j = 1, 2, \dots, n$), 其属性权重值是用三角模糊数表示的,由决策者给出,那么属性的 C_j 的属性权重值记为: $w_j = (a_{j1}, a_{j2}, a_{j3})$ ($j = 1, 2, \dots, n$)。属性权重值 w_j ($j = 1, 2, \dots, n$)的期望权重值,可由下面的公式计算得到

$$EV(w_j) = \frac{a_{j1} + a_{j2} + a_{j3}}{3}. \quad (6-13)$$

那么把(6-13)式得到的期望权重值 w_j ($j = 1, 2, \dots, n$)标准化可得到每个属性的权重值。

$$\bar{w}_j = \frac{EV(w_j)}{\sum_{i=1}^n EV(w_j)}. \quad (6-14)$$

在模糊多属性群决策环境下,理想方案通常用来确定最优方案,尽管理想方案在现实生活中不存在,但它是方案排序的一个有力工具^[143]。本节借助于各个方案与理想方案的相似度来确定最优方案,与理想方案相似度最大者(最接近理想方案)即为最优方案。

在大多数情况下,需要考虑决策属性的权重,因此方案 A_i 与理想方案 A_{IP} 之

间的相似度的计算公式如下：

$$S^J(A_i, A_{IP}) = \sum_{j=1}^n w_j \frac{\sum_{l=1}^3 a_{ijl} b_{IPjl}}{\sum_{l=1}^3 a_{ijl}^2 + \sum_{l=1}^3 b_{IPjl}^2 - \sum_{l=1}^3 a_{ijl} b_{IPjl}}, \quad (6-15)$$

$$S^E(A_i, A_{IP}) = \sum_{j=1}^n w_j \frac{2 \sum_{l=1}^3 a_{ijl} b_{IPjl}}{\sum_{l=1}^3 a_{ijl}^2 + \sum_{l=1}^3 b_{IPjl}^2}, \quad (6-16)$$

$$S^C(A_i, A_{IP}) = \sum_{j=1}^n w_j \frac{\sum_{l=1}^3 a_{ijl} b_{IPjl}}{\sqrt{\sum_{l=1}^3 a_{ijl}^2} \sqrt{\sum_{l=1}^3 b_{IPjl}^2}}. \quad (6-17)$$

基于相似度方法的三角模糊偏好多属性群决策问题的决策步骤可简单概括如下：

步骤1 给出每个方案 A_i ($i = 1, 2, \dots, p$)和每个属性 C_j ($j = 1, 2, \dots, n$)的三角模糊型偏好矢量；

步骤2 由公式 (6-12) 可求得每个方案 A_i ($i = 1, 2, \dots, p$)的三角模糊型群体偏好矢量；

步骤3 由等式 (6-13) 和 (6-14) 计算每个属性 C_j ($j = 1, 2, \dots, n$)三角模糊数的期望权重值 w_j ，并标准化求得每个属性的权重。

步骤4 由公式(6-15) - (6-17)，可计算得到每个方案 A_i ($i = 1, 2, \dots, p$)与理想方案的加权J-相似度、加权E-相似度和加权C-相似度。

步骤5 由加权相似度大小来排列 p 个方案，并根据相似度最大原则，确定最优方案。

6.2.3 案例分析

在这一小节，我们将给出一案例来验证本节方法的有效性和可行性。假设某市应急管理办公室需要招募一应急办主任，通过初试考核后剩下四个候选人（对应本节的决策方案） A_1 、 A_2 、 A_3 和 A_4 ，需要进一步考核，为了选出最合适的人，决策者邀请了5个专家，从下面5个方面（对应本节的决策属性）：(1)情感控制能力(C_1)；(2)基本的语言表达能力(C_2)；(3)教育经历(C_3)；(4)工作经验(C_4)；(5)性格和自信(C_5)进行评价。语言集为{极差、非常差、差、一般差、中等、一般好、好、非常好、极好}。5个专家采用语言值对上述方案评价，语言值与三角模糊数的对照表见表5-1。

该决策问题的决策过程如下：

表 6-1 语言值与三角模糊数的对照表

语言形式	三角模糊数
极差(AP)	(0.0,0.0,0.1)
非常差(VP)	(0.0,0.1,0.2)
差(P)	(0.1,0.2,0.3)
一般差(MP)	(0.3,0.4,0.5)
中等(M)	(0.4,0.5,0.6)
一般好(MD)	(0.5,0.6,0.7)
好(G)	(0.7,0.8,0.9)
非常好(VG)	(0.8,0.9,1.0)
极好(AG)	(0.9,1.0,1.0)

步骤1 5个专家分别提供对上述四个方案的评价语言值，转化为三角模糊数如表6-2所示。

步骤2 由公式 (6-12)可求得每个方案的 A_i ($i = 1, 2, 3, 4$)的三角模糊群偏好矢量，如下：

$$U_1 = \{ \langle C_1, (0.13, 0.17, 0.22) \rangle, \langle C_2, (0.36, 0.46, 0.56) \rangle, \langle C_3, (0.39, 0.54, 0.69) \rangle, \langle C_4, (0.42, 0.50, 0.60) \rangle, \langle C_5, (0.52, 0.60, 0.60) \rangle \},$$

$$U_2 = \{ \langle C_1, (0.22, 0.27, 0.32) \rangle, \langle C_2, (0.54, 0.64, 0.74) \rangle, \langle C_3, (0.60, 0.75, 0.90) \rangle, \langle C_4, (0.44, 0.54, 0.62) \rangle, \langle C_5, (0.18, 0.26, 0.26) \rangle \},$$

$$U_3 = \{ \langle C_1, (0.18, 0.23, 0.27) \rangle, \langle C_2, (0.28, 0.36, 0.46) \rangle, \langle C_3, (0.69, 0.84, 0.99) \rangle, \langle C_4, (0.16, 0.24, 0.34) \rangle, \langle C_5, (0.48, 0.58, 0.58) \rangle \},$$

$$U_4 = \{ \langle C_1, (0.21, 0.26, 0.31) \rangle, \langle C_2, (0.34, 0.42, 0.52) \rangle, \langle C_3, (0.57, 0.72, 0.87) \rangle, \langle C_4, (0.28, 0.38, 0.48) \rangle, \langle C_5, (0.46, 0.56, 0.56) \rangle \}.$$

步骤3 属性 C_i 的三角模糊数型的权重值为：

$$w_1 = \langle C_1, (0.3, 0.4, 0.5) \rangle, w_2 = \langle C_2, (0.5, 0.6, 0.7) \rangle, w_3 = \langle C_3, (0.1, 0.2, 0.3) \rangle, w_4 = \langle C_4, (0.9, 1.0, 1.0) \rangle, w_5 = \langle C_5, (0.4, 0.5, 0.7) \rangle .$$

由公式(6-13)可求得上述权重的期望值，那么利用公式 (6-14) 把其标准化得到5个属性的权重矢量为： $W=(0.1481,0.2222,0.0741,0.3580,0.1975)$ 。

表 6-2 5个专家的三角模糊偏好矢量表

A	M	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
A_1	1	(0.0, 0.0, 0.1)	(0.4, 0.5, 0.6)	(0.5, 0.6, 0.7)	(0.8, 0.9, 1.0)	(0.5, 0.6, 0.7)
	2	(0.1, 0.2, 0.3)	(0.3, 0.4, 0.5)	(0.4, 0.5, 0.6)	(0.5, 0.6, 0.7)	(0.9, 1.0, 1.0)
	3	(0.4, 0.5, 0.6)	(0.4, 0.5, 0.6)	(0.1, 0.2, 0.3)	(0.3, 0.4, 0.5)	(0.0, 0.0, 0.1)
	4	(0.3, 0.4, 0.5)	(0.1, 0.2, 0.3)	(0.0, 0.1, 0.2)	(0.5, 0.6, 0.7)	(0.7, 0.8, 0.9)
	5	(0.5, 0.6, 0.7)	(0.7, 0.8, 0.9)	(0.2, 0.3, 0.4)	(0.0, 0.0, 0.1)	(0.5, 0.6, 0.7)
A_2	1	(0.4, 0.5, 0.6)	(0.8, 0.9, 1.0)	(0.5, 0.6, 0.7)	(0.4, 0.5, 0.6)	(0.0, 0.1, 0.2)
	2	(0.1, 0.2, 0.3)	(0.4, 0.5, 0.6)	(0.5, 0.6, 0.7)	(0.8, 0.9, 1.0)	(0.1, 0.2, 0.3)
	3	(0.7, 0.8, 0.9)	(0.5, 0.6, 0.7)	(0.3, 0.4, 0.5)	(0.1, 0.2, 0.3)	(0.0, 0.1, 0.2)
	4	(0.5, 0.6, 0.7)	(0.7, 0.8, 0.9)	(0.3, 0.4, 0.5)	(0.9, 1.0, 1.0)	(0.0, 0.0, 0.1)
	5	(0.5, 0.6, 0.7)	(0.3, 0.4, 0.5)	(0.4, 0.5, 0.6)	(0.0, 0.1, 0.2)	(0.8, 0.9, 1.0)
A_3	1	(0.3, 0.4, 0.5)	(0.1, 0.2, 0.3)	(0.7, 0.8, 0.9)	(0.4, 0.5, 0.6)	(0.5, 0.6, 0.7)
	2	(0.1, 0.2, 0.3)	(0.5, 0.6, 0.7)	(0.3, 0.4, 0.5)	(0.0, 0.0, 0.1)	(0.9, 1.0, 1.0)
	3	(0.9, 1.0, 1.0)	(0.4, 0.5, 0.6)	(0.5, 0.6, 0.7)	(0.0, 0.1, 0.2)	(0.3, 0.4, 0.5)
	4	(0.1, 0.2, 0.3)	(0.0, 0.0, 0.1)	(0.5, 0.6, 0.7)	(0.4, 0.5, 0.6)	(0.0, 0.1, 0.2)
	5	(0.4, 0.5, 0.6)	(0.4, 0.5, 0.6)	(0.3, 0.4, 0.5)	(0.0, 0.1, 0.2)	(0.7, 0.8, 0.9)
A_4	1	(0.5, 0.6, 0.7)	(0.5, 0.6, 0.7)	(0.4, 0.5, 0.6)	(0.3, 0.4, 0.5)	(0.8, 0.9, 1.0)
	2	(0.4, 0.5, 0.6)	(0.3, 0.4, 0.5)	(0.5, 0.6, 0.7)	(0.0, 0.1, 0.2)	(0.4, 0.5, 0.6)
	3	(0.3, 0.4, 0.5)	(0.3, 0.4, 0.5)	(0.4, 0.5, 0.6)	(0.5, 0.6, 0.7)	(0.7, 0.8, 0.9)
	4	(0.1, 0.2, 0.3)	(0.0, 0.1, 0.2)	(0.5, 0.6, 0.7)	(0.3, 0.4, 0.5)	(0.1, 0.2, 0.3)
	5	(0.7, 0.8, 0.9)	(0.4, 0.5, 0.6)	(0.1, 0.2, 0.3)	(0.3, 0.4, 0.5)	(0.3, 0.4, 0.5)

步骤4 决策者给出理想方案的三角模糊数型偏好矢量为:

$$A_{IP} = \{ \langle C_1, (0.40, 0.50, 0.60) \rangle, \langle C_2, (0.70, 0.80, 0.90) \rangle, \langle C_3, (0.80, 0.90, 1.00) \rangle, \langle C_4, (0.70, 0.80, 0.90) \rangle, \langle C_5, (0.50, 0.60, 0.70) \rangle \}.$$

由公式(6-15)-(6-17), 可计算得到每个方案 A_i ($i = 1, 2, \dots, 5$)的加权J-相似度、加权E-相似度和加权C-相似度, 决策结果如表5-3所示。

步骤5 从表6-3中可以看出, 前面6.2.2节提出的三种三角模糊数偏好型的多属性群决策方法有相同的决策结果, 最优方案为 A_2 , 即 A_2 为最适合的候选人。决策结果更进一步表明基于相似度的三角模糊偏好下多属性决策方法是有效的。

6.2.4 小结

在这一小节中, 我们利用向量空间已有的相似度模型, 提出了两个三角模

表 6-3 三种加权相似度的决策结果

	S^J	S^E	S^C
A_1	0.7869	0.8707	0.9974
A_2	0.7976	0.8775	0.9988
A_3	0.6367	0.7546	0.9918
A_4	0.7528	0.8525	0.9964
排序	$A_2 \succ A_1 \succ A_4 \succ A_3$	$A_2 \succ A_1 \succ A_4 \succ A_3$	$A_2 \succ A_1 \succ A_4 \succ A_3$
最优	A_2	A_2	A_2

糊数之间的J-相似度、E-相似度和C-相似度以及对应的三种加权相似度，并在它们的基础上构建了三角模糊数型偏好的多属性大群体决策方法，且决策属性权重信息和决策专家权重信息是已知的，并且用三角模糊数表示。最后给出一应急管理中的案例，利用上述方法选出最合适的应急办主任，从三种加权相似度的大小可以很容易选择最优的人。三种不同的相似度的决策结果一致，更进一步验证了，本节方法的可行性和有效性。

6.3 基于参数型直觉三角模糊数偏好的多属性大群体决策方法

三角模糊数可以从两方面进行拓展，有许多学者把三角模糊数拓展到三角直觉模糊数，文献^[53]中，Li介绍了三角直觉模糊的定义（直觉模糊数的一种特殊形式），并提出了三角直觉模糊数的排序原则，在价值指数与模糊指数比值的基础上确定两个三角直觉模糊数的大小，并把它应用到多属性决策问题中，用于决策方案的排序。在某些特殊的多属性决策问题中，决策过程是动态的并且每个阶段的属性值及决策成员是变化的，因此，Chen和Li在文献^[144]中，在三角直觉模糊数的基础上提出了一种动态多属性决策方法，其中属性权重是由两个三角直觉模糊数之间的距离确定的。

在这一小节，我们从另一个方面，把三角模糊数拓展到参数型直觉三角模糊数，给出两个参数型直觉三角模糊数之间的相似度，并在相似度基础上给出参数型直觉三角模糊数型偏好的多属性群决策方法，最后给出一案例分析讨论本节的方法，决策结果表明本节的方法是可行的。

6.3.1 三角直觉模糊数和参数型直觉三角模糊数

首先介绍三角直觉模糊数和参数型直觉三角模糊数的定义。

定义6.6^[145] 设实数集 R 上的三角直觉模糊数 $\alpha = \langle (a, b, c); \mu_\alpha, \nu_\alpha \rangle$ ，它的

隶属函数和非隶属函数分别为：

$$\mu_{\alpha}(x) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ \frac{(x-a)\mu_{\alpha}}{b-a}, & a \leq x \leq b, \\ \mu_{\alpha}, & \text{if } x = b, \\ \frac{(c-x)\mu_{\alpha}}{c-b}, & b \leq x \leq c, \\ 0, & c < x, \end{cases}$$

和

$$\nu_{\alpha}(x) = \begin{cases} 1, & x < a, \\ \frac{b-x+\nu_{\alpha}(x-a)}{b-a}, & a \leq x \leq b, \\ \nu_{\alpha}, & \text{if } x = b, \\ \frac{x-b+\nu_{\alpha}(c-x)}{c-b}, & b \leq x \leq c, \\ 1, & c < x. \end{cases}$$

其中， μ_{α} 和 ν_{α} 分别是隶属函数的最大隶属度和非隶属函数的最小非隶属度，并且满足 $0 \leq \mu_{\alpha} \leq 1$ ， $0 \leq \nu_{\alpha} \leq 1$ 和 $0 \leq \mu_{\alpha} + \nu_{\alpha} \leq 1$ 。为了直观的描述三角直觉模糊数的隶属函数和非隶属函数，利用matlab画出它们的图像，见图6-2。

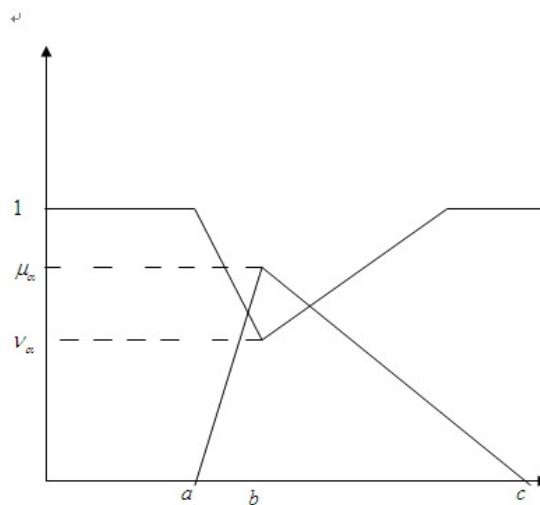


图 6-2 三角直觉模糊数的隶属函数和非隶属函数

从另一方面，我们把三角模糊数扩展到参数型直觉三角模糊数，由隶属函数和非隶属函数刻画，详细定义见定义6.7。

定义6.7 设实数集 R 上的参数型直觉三角模糊数 α 含有6个参数并且这些参数满足 $b_1 \leq a_1 \leq a_2 \leq b_2 \leq a_3 \leq b_3$ ，记为 $\alpha = \langle (a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3) \rangle$ ，那么其

隶属函数和非隶属函数分别定义如下：

$$\mu_{\alpha}(x) = \begin{cases} 0, & x < a_1, \\ \frac{x-a_1}{a_2-a_1}, & a_1 \leq x \leq a_2, \\ \frac{x-a_3}{a_2-a_3}, & a_2 \leq x \leq a_3, \\ 0, & a_3 < x, \end{cases} \quad (6-18)$$

和

$$\nu_{\alpha}(x) = \begin{cases} 1, & x < b_1, \\ \frac{x-b_2}{b_1-b_2}, & b_1 \leq x \leq b_2, \\ \frac{x-b_2}{b_3-b_2}, & b_2 \leq x \leq b_3, \\ 1, & b_3 < x. \end{cases} \quad (6-19)$$

可以从图6-3直观的看出参数型直觉三角模糊数的隶属函数和非隶属函数，与三角直觉模糊数不同。

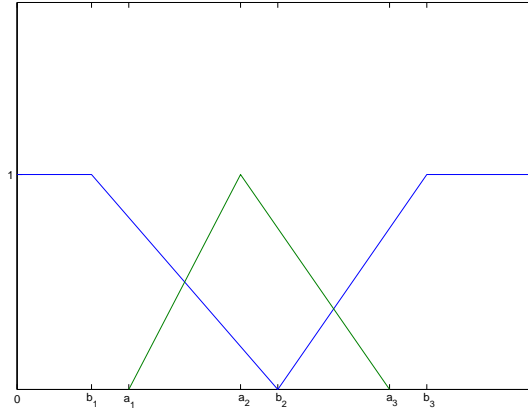


图 6-3 参数型直觉三角模糊数的隶属函数和非隶属函数

设 $\alpha = \langle (a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3) \rangle$ 和 $\beta = \langle (c_1, c_2, c_3), (d_1, d_2, d_3) \rangle$ 是实数集上的两个参数型直觉三角模糊数， γ 是任意的正实数，那么参数型直觉三角模糊数的基本运算法则如下：

$$\begin{aligned} \alpha \oplus \beta &= \langle (a_1 + c_1, a_2 + c_2, a_3 + c_3), (b_1 + d_1, b_2 + d_2, b_3 + d_3) \rangle, \\ \alpha \otimes \beta &= \langle (a_1 c_1, a_2 c_2, a_3 c_3), (b_1 d_1, b_2 d_2, b_3 d_3) \rangle, \\ \gamma \otimes \alpha &= \langle (\gamma a_1, \gamma a_2, \gamma a_3), (\gamma b_1, \gamma b_2, \gamma b_3) \rangle, \\ \frac{1}{\alpha} &= \langle \left(\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_3}\right), \left(\frac{1}{b_1}, \frac{1}{b_2}, \frac{1}{b_3}\right) \rangle. \end{aligned}$$

Grzegorewski在文献^[120]定义了直觉模糊数的期望值，我们以相同的方法定义本文的参数型直觉三角模糊数的期望值，见定义6.8。

定义6.8 设 α 是实数集 R 上的参数型直觉三角模糊数, 利用参数型直觉三角模糊数 α 的期望区间的中心值定义参数型直觉三角模糊数 α 的期望值如下:

$$EV(\alpha) = \frac{E_*(\alpha) + E^*(\alpha)}{2}. \quad (6-20)$$

其中,

$$E_*(\alpha) = \frac{b_1 + a_2}{2} + \frac{1}{2} \int_{b_1}^{b_2} h_\alpha(x) dx - \frac{1}{2} \int_{a_1}^{a_2} f_\alpha(x) dx, \quad (6-21)$$

$$E^*(\alpha) = \frac{b_3 + a_2}{2} + \frac{1}{2} \int_{a_2}^{a_3} g_\alpha(x) dx - \frac{1}{2} \int_{b_2}^{b_3} k_\alpha(x) dx. \quad (6-22)$$

因此, 基于直觉模糊数的期望值定义拓展得到的参数型直觉三角模糊数的期望值, 由下面的定理给出.

定理 6.1. 设 $\alpha = \langle (a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3) \rangle$ 是实数集 R 的参数型直觉三角模糊数, 那么当

$$\begin{aligned} f_\alpha(x) &= \frac{x - a_1}{a_2 - a_1}, \\ g_\alpha(x) &= \frac{x - a_3}{a_2 - a_3}, \\ h_\alpha(x) &= \frac{x - b_2}{b_1 - b_2}, \\ k_\alpha(x) &= \frac{x - b_2}{b_3 - b_2}, \end{aligned}$$

且 $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 \in R$, 则 α 的期望值为:

$$EV(\alpha) = \frac{1}{8}(a_1 + 2a_2 + a_3 + b_1 + 2b_2 + b_3). \quad (6-23)$$

证明. 由公式 (6-21), 可求得

$$\begin{aligned} E_*(\alpha) &= \frac{b_1 + a_2}{2} + \frac{1}{2} \int_{b_1}^{b_2} \frac{x - b_2}{b_1 - b_2} dx - \frac{1}{2} \int_{a_1}^{a_2} \frac{x - a_1}{a_2 - a_1} dx \\ &= \frac{b_1 + a_2}{2} + \frac{1}{2(b_1 - b_2)} \times \left(\frac{1}{2}x^2 - b_1x \right) \Big|_{b_1}^{b_2} - \frac{1}{2(a_2 - a_1)} \times \left(\frac{1}{2}x^2 - a_1x \right) \Big|_{a_1}^{a_2} \\ &= \frac{b_1 + a_2}{2} + \frac{b_2 - b_1}{4} + \frac{a_1 - a_2}{4} \\ &= \frac{b_2 + a_2 + b_1 + a_1}{4}. \end{aligned} \quad (6-24)$$

同理, 由公式 (6-22), 可求得

$$\begin{aligned} E^*(\alpha) &= \frac{b_3 + a_2}{2} + \frac{1}{2} \int_{a_2}^{a_3} \frac{x - a_3}{a_2 - a_3} dx - \frac{1}{2} \int_{b_2}^{b_3} \frac{x - b_2}{b_3 - b_2} dx \\ &= \frac{b_3 + a_2}{2} + \frac{1}{2(a_2 - a_3)} \times \left(\frac{1}{2}x^2 - a_3x \right) \Big|_{a_2}^{a_3} - \frac{1}{2(b_3 - b_2)} \times \left(\frac{1}{2}x^2 - b_2x \right) \Big|_{b_2}^{b_3} \\ &= \frac{b_3 + a_2}{2} + \frac{a_3 - a_2}{4} + \frac{b_2 - b_3}{4} \\ &= \frac{b_2 + a_2 + b_3 + a_3}{4}. \end{aligned} \quad (6-25)$$

把等式 (6-24) 和 (6-25) 代入 (6-23), 可以得到参数型直觉三角模糊数的期望值为:

$$\begin{aligned} EV(\alpha) &= \frac{1}{2} \left(\frac{b_2 + a_2 + b_1 + a_1}{4} + \frac{b_3 + a_2 + b_2 + a_3}{4} \right) \\ &= \frac{1}{8} (a_1 + 2a_2 + a_3 + b_1 + 2b_2 + b_3). \end{aligned}$$

证毕。 □

设 $\alpha = \langle (a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3) \rangle$ 和 $\beta = \langle (c_1, c_2, c_3), (d_1, d_2, d_3) \rangle$ 是实数集上的两个参数型直觉三角模糊数, 那么如果 $\alpha = \beta$, 即: $a_1 = c_1, a_2 = c_2, a_3 = c_3, b_1 = d_1, b_2 = d_2, b_3 = d_3$, 则下面的等式成立,

$$EV(\alpha) = EV(\beta).$$

如果 $\alpha > \beta$, i.e. $a_1 > c_1, a_2 > c_2, a_3 > c_3, b_1 > d_1, b_2 > d_2, b_3 > d_3$, 则下面的不等式成立,

$$EV(\alpha) > EV(\beta).$$

6.3.2 参数型直觉三角模糊数间的相似度

定义6.9 设 R 上的映射 S 为: $R^3 \times R^3 \rightarrow [0, 1]$, α, β 和 γ 是实数集上的三个参数型直觉三角模糊数, 如果 $S(\alpha, \beta)$ 满足下面的性质(P1-P4), 那么 $S(\alpha, \beta)$ 称为参数型直觉三角模糊数 α 和 β 之间的相似度

$$(P1) \quad 0 \leq S(\alpha, \beta) \leq 1,$$

$$(P2) \quad S(\alpha, \beta) = 1, \quad \text{if } \alpha = \beta,$$

$$(P3) \quad S(\alpha, \beta) = S(\beta, \alpha),$$

$$(P4) \quad S(\alpha, \gamma) \leq S(\alpha, \beta), \quad S(\alpha, \gamma) \leq S(\beta, \gamma), \quad \alpha \leq \beta \leq \gamma, \alpha, \beta, \gamma \in R.$$

设 $\alpha_1 = \langle (a_{11}, a_{12}, a_{13}), (b_{11}, b_{12}, b_{13}) \rangle$ 和 $\alpha_2 = \langle (a_{21}, a_{22}, a_{23}), (b_{21}, b_{22}, b_{23}) \rangle$ 是实数集上的两个参数型直觉三角模糊数, 那么两个参数型直觉三角模糊数 α_1 和 α_2 之间的Hamming距离、Euclidean距离和Hausdorff距离分别为:

$$S^H(\alpha_1, \alpha_2) = 1 - \frac{\sum_{i=1}^3 |a_{1i} - a_{2i}|}{3} - \frac{\sum_{i=1}^3 |b_{1i} - b_{2i}|}{3}, \quad (6-26)$$

$$S^E(\alpha_1, \alpha_2) = 1 - \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^3 (a_{1i} - a_{2i})^2}{3} + \frac{\sum_{i=1}^3 (b_{1i} - b_{2i})^2}{3}}, \quad (6-27)$$

和

$$S^F(\alpha_1, \alpha_2) = 1 - \max\left\{\frac{\sum_{i=1}^3 |a_{1i} - a_{2i}|}{3}, \frac{\sum_{i=1}^3 |b_{1i} - b_{2i}|}{3}\right\}. \quad (6-28)$$

定理 6.2. $S^H(\alpha_1, \alpha_2)$, $S^E(\alpha_1, \alpha_2)$ 和 $S^F(\alpha_1, \alpha_2)$ 是两个参数型直觉三角模糊数 α_1 和 α_2 之间的相似度。

证明. 以两个参数型直觉三角模糊数的海明距离为例:

(P1) $S^H(\alpha_1, \alpha_2) \geq 0$ 显然成立, 下证 $S^H(\alpha_1, \alpha_2) \leq 1$ 。

因为 $0 \leq b_1 \leq a_1 \leq a_2 \leq b_2 \leq a_3 \leq b_3 \leq 1$, 所以

$$\frac{\sum_{i=1}^3 |a_{1i} - a_{2i}|}{3} + \frac{\sum_{i=1}^3 |b_{1i} - b_{2i}|}{3} \geq 0 \quad (6-29)$$

把(6-29)代入(6-26)得: $S^H(\alpha_1, \alpha_2) \leq 1$, 总之 $0 \leq S^H(\alpha_1, \alpha_2) \leq 1$ 。

(P2) 若 $\alpha_1 = \alpha_2$, 即: $a_{11} = a_{21}, a_{12} = a_{22}, a_{13} = a_{23}, b_{11} = b_{21}, b_{12} = b_{22}, b_{13} = b_{23}$, 代入(6-26)得:

$$S^H(\alpha_1, \alpha_2) = 1.$$

(P3)显然有:

$$S^H(\alpha_1, \alpha_2) = 1 - \frac{\sum_{i=1}^3 |a_{1i} - a_{2i}|}{3} - \frac{\sum_{i=1}^3 |b_{1i} - b_{2i}|}{3} = S^H(\alpha_2, \alpha_1).$$

(P4) 设 $\alpha_3 = \langle (a_{31}, a_{32}, a_{33}), (b_{31}, b_{32}, b_{33}) \rangle$ 也是实数集上的参数型直觉三角模糊数, 若 $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \alpha_3$, 则 $a_{11} \leq a_{21} \leq a_{31}, a_{12} \leq a_{22} \leq a_{32}, a_{13} \leq a_{23} \leq a_{33}, b_{11} \leq b_{21} \leq b_{31}, b_{12} \leq b_{22} \leq b_{32}, b_{13} \leq b_{23} \leq b_{33}$, 代入(6-26)得:

$$S^H(\alpha_1, \alpha_3) \leq S^H(\alpha_1, \alpha_2), \quad S^H(\alpha_1, \alpha_3) \leq S^H(\alpha_2, \alpha_3)$$

同理可证得两个参数型直觉三角模糊数之间的Euclidean距离和Hausdorff距离是它们之间的相似度, 这里不再赘述。

证毕。 □

6.3.3 参数型直觉三角模糊数偏好的多属性大群体决策方法

在这一小节, 由前面讨论的两个参数型直觉三角模糊数之间的相似度模型, 给出参数型直觉三角模糊数型的多属性大群体决策问题的方法, 其问题描述为: 设 $A = \{A_1, A_2, \dots, A_p\}$ 是该决策问题的方案集, $C = \{C_1, C_2, \dots, C_n\}$ 是该决策问

题的决策属性集合。决策者邀请 m 个专家对该决策问题进行评价， m 个专家构成集合 $G = \{G_1, G_2, \dots, G_m\}$ 。专家根据语言值对上述方案从 n 个属性进行评价，则第 k 个专家 G_k 对第 i 个方案 A_i 的参数型直觉三角模糊数型的偏好矢量为：

$$v_i^k = \{ \langle C_1, (a_{i11}^k, a_{i12}^k, a_{i13}^k), (b_{i11}^k, b_{i12}^k, b_{i13}^k) \rangle, \langle C_2, (a_{i21}^k, a_{i22}^k, a_{i23}^k), (b_{i21}^k, b_{i22}^k, b_{i23}^k) \rangle, \dots, \langle C_n, (a_{in1}^k, a_{in2}^k, a_{in3}^k), (b_{in1}^k, b_{in2}^k, b_{in3}^k) \rangle \},$$

这里， $i = 1, 2, \dots, p$ ， $k = 1, 2, \dots, m$ ，参数型直觉三角模糊数 $\langle C_j, (a_{ij1}^k, a_{ij2}^k, a_{ij3}^k), (b_{ij1}^k, b_{ij2}^k, b_{ij3}^k) \rangle$ 表示方案 A_i 满足 C_j 的隶属度和非隶属度。

对于每个方案 A_i ，其群体偏好矢量为：

$$U_i = \{ \langle C_1, (\frac{\sum_{k=1}^m a_{i11}^k}{m}, \frac{\sum_{k=1}^m a_{i12}^k}{m}, \frac{\sum_{k=1}^m a_{i13}^k}{m}), (\frac{\sum_{k=1}^m b_{i11}^k}{m}, \frac{\sum_{k=1}^m b_{i12}^k}{m}, \frac{\sum_{k=1}^m b_{i13}^k}{m}) \rangle, \langle C_2, (\frac{\sum_{k=1}^m a_{i21}^k}{m}, \frac{\sum_{k=1}^m a_{i22}^k}{m}, \frac{\sum_{k=1}^m a_{i23}^k}{m}), (\frac{\sum_{k=1}^m b_{i21}^k}{m}, \frac{\sum_{k=1}^m b_{i22}^k}{m}, \frac{\sum_{k=1}^m b_{i23}^k}{m}) \rangle, \dots, \langle C_n, (\frac{\sum_{k=1}^m a_{in1}^k}{l}, \frac{\sum_{k=1}^m a_{in2}^k}{m}, \frac{\sum_{k=1}^m a_{in3}^k}{m}), (\frac{\sum_{k=1}^m b_{in1}^k}{m}, \frac{\sum_{k=1}^m b_{in2}^k}{m}, \frac{\sum_{k=1}^m b_{in3}^k}{m}) \rangle \}, \quad (6-30)$$

对于不同的属性 C_j ($j = 1, 2, \dots, n$)，其参数型直觉三角模糊数型的权重值由决策者给出，为 $w_j = \langle (a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3) \rangle$ ($j = 1, 2, \dots, n$)。由(6-23)式可求得 w_j ($j = 1, 2, \dots, n$)的期望值，然后利用下面的公式把 w_j ($j = 1, 2, \dots, n$)的期望值标准化得到各个属性的权重值，

$$\bar{w}_j = \frac{EV(w_j)}{\sum_{i=1}^m EV(w_j)}. \quad (6-31)$$

在模糊多属性大群体决策中，理想方案通常用来确定最优方案，虽然理想方案在现实生活中不存在，但它为方案评估提供了有效的理论工具。决策属性可以分为利益型属性和成本型属性，对于利益型属性，决策者希望它越大越好，反之对于成本型属性，决策者希望它越小越好。在本节的方法中，对于利益型属性其参数型直觉三角模糊型属性值为： $\langle (0.9, 0.9, 1.0), (0.9, 1.0, 1.0) \rangle$ ，对于成本型属性其参数型直觉三角模糊数型属性值为： $\langle (0.0, 0.0, 0.1), (0.0, 0.1, 0.2) \rangle$ 。

决策者首先对决策属性分类, 得到理想方案为 A_{IP} , 那么拓展 (6-26) - (6-28), 得到第 i 个方案 A_i 与理想方案 A_{IP} 之间的加权相似度, 计算公式为:

$$S^H(A_i, A_{IP}) = 1 - \sum_i^m \bar{w}_i \left(\frac{\sum_{k=1}^3 |a_{i1k} - a_{IP2k}|}{3} + \frac{\sum_{k=1}^3 |b_{i1k} - b_{IP2k}|}{3} \right), \quad (6-32)$$

$$S^E(A_i, A_{IP}) = 1 - \sum_i^m \bar{w}_i \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^3 (a_{i1k} - a_{IP2k})^2}{3} + \frac{\sum_{k=1}^3 (b_{i1k} - b_{IP2k})^2}{3}}, \quad (6-33)$$

$$S^F(A_i, A_{IP}) = 1 - \sum_i^m \bar{w}_i \left(\max \left\{ \frac{\sum_{k=1}^3 |a_{i1k} - a_{IP2k}|}{3}, \frac{\sum_{k=1}^3 |b_{i1k} - b_{IP2k}|}{3} \right\} \right). \quad (6-34)$$

该决策问题的决策步骤如下:

步骤1 决策专家依次给出每个方案的语言值, 并把每个专家关于各个方案的评价语言值转化为参数型直觉三角模糊数型的偏好矢量。

步骤2 由公式 (6-30) 可计算得到每个方案 A_i ($i = 1, 2, \dots, p$)的群体偏好矢量。

步骤3 计算每个属性 C_j ($j = 1, 2, \dots, n$)的期望属性值 w_j , 由公式 (6-31) 标准化得到的属性 C_j 的权重值。

步骤4 由决策者给出理想方案 A_{IP} 的参数型直觉三角模糊数型偏好矢量, 由公式 (6-32) - (6-34), 可得到每个方案 A_i ($i = 1, 2, \dots, p$)与理想方案的加权相似度。

步骤5 根据加权相似度大小, 对上述方案进行排序, 加权相似度最大者对应最优方案。

6.3.4 案例分析

在这一小节, 我们将给出一案例来验证本节方法的有效性和可行性。某航空公司公开选拔航空安全技术中心的总经理, 经过人力资源部门初步考核推荐了四个候选人 (对应本节的决策方案) A_1 、 A_2 、 A_3 和 A_4 , 需要进一步考核, 为了选出最合适的人, 公司总裁邀请了董事会的5个专家, 从下面5个方面 (对应本节的决策属性) 考核: (1)情感控制能力(C_1); (2) 基本的语言表达能力(C_2); (3) 教育经历(C_3); (4) 工作经验(C_4); (5)性格和自信(C_5)进行评价。语言集为{极差、非常差、差、一般差、中等、一般好、好、非常好、极好}, 5个专家采用语言值对上述方案评价, 语言值与参数型直觉三角模糊数的对照表见表6-4。

步骤1 5个专家对上述四个候选人给出语言值, 利用表6-4, 转化为参数型直觉三角模糊数型偏好矢量, 见表6-5。

表 6-4 语言值与参数型直觉三角模糊数的对照表

语言形式	参数型直觉三角模糊数
极差(Absolutely-poor)	$\langle (0.0, 0.0, 0.0), (0.0, 0.0, 0.1) \rangle$
非常差(Very-poor)	$\langle (0.0, 0.0, 0.1), (0.0, 0.1, 0.2) \rangle$
差(Poor)	$\langle (0.1, 0.2, 0.3), (0.0, 0.2, 0.4) \rangle$
一般差(Medium-poor)	$\langle (0.2, 0.3, 0.4), (0.1, 0.3, 0.5) \rangle$
中等(Medium)	$\langle (0.4, 0.5, 0.6), (0.3, 0.5, 0.7) \rangle$
一般好(Medium-good)	$\langle (0.5, 0.6, 0.7), (0.4, 0.7, 0.8) \rangle$
好(Good)	$\langle (0.7, 0.8, 0.9), (0.7, 0.9, 1.0) \rangle$
非常好(Very-good)	$\langle (0.8, 0.9, 1.0), (0.8, 1.0, 1.0) \rangle$
极好(Absolutely-good)	$\langle (0.9, 0.9, 1.0), (0.9, 1.0, 1.0) \rangle$

步骤2 由公式(6-30)可求得各个方案 A_i ($i = 1, 2, 3, 4$)的参数型直觉三角模糊数型群偏好矢量, 如下:

$$U_1 = \{ \langle C_1, (0.24, 0.32, 0.42), (0.16, 0.36, 0.52) \rangle, \langle C_2, (0.36, 0.46, 0.56), (0.28, 0.48, 0.66) \rangle, \langle C_3, (0.24, 0.32, 0.42), (0.16, 0.36, 0.52) \rangle, \langle C_4, (0.40, 0.48, 0.58), (0.34, 0.56, 0.66) \rangle, \langle C_5, (0.52, 0.58, 0.68), (0.48, 0.68, 0.76) \rangle \};$$

$$U_2 = \{ \langle C_1, (0.44, 0.54, 0.64), (0.36, 0.60, 0.74) \rangle, \langle C_2, (0.52, 0.62, 0.72), (0.46, 0.68, 0.80) \rangle, \langle C_3, (0.36, 0.46, 0.56), (0.26, 0.50, 0.66) \rangle, \langle C_4, (0.44, 0.50, 0.60), (0.40, 0.56, 0.66) \rangle, \langle C_5, (0.18, 0.22, 0.30), (0.16, 0.28, 0.38) \rangle \};$$

$$U_3 = \{ \langle C_1, (0.34, 0.42, 0.52), (0.26, 0.44, 0.60) \rangle, \langle C_2, (0.28, 0.36, 0.44), (0.20, 0.38, 0.54) \rangle, \langle C_3, (0.42, 0.52, 0.28), (0.12, 0.24, 0.38) \rangle, \langle C_4, (0.46, 0.52, 0.62), (0.42, 0.60, 0.70) \rangle, \langle C_5, (0.62, 0.34, 0.58), (0.72, 0.16, 0.20) \rangle \};$$

$$U_4 = \{ \langle C_1, (0.42, 0.52, 0.62), (0.34, 0.56, 0.72) \rangle, \langle C_2, (0.34, 0.42, 0.52), (0.26, 0.46, 0.62) \rangle, \langle C_3, (0.38, 0.48, 0.58), (0.28, 0.52, 0.68) \rangle, \langle C_4, (0.22, 0.30, 0.40), (0.14, 0.34, 0.50) \rangle, \langle C_5, (0.44, 0.54, 0.64), (0.38, 0.58, 0.72) \rangle \}.$$

表 6-5 5个专家对4个方案的参数型直觉三角模糊数型偏好矢量

A	M	C_1	C_2	C_3
		C_4	C_5	
A_1	1	$\langle (0.0, 0.0, 0.1), (0.0, 0.1, 0.2) \rangle$	$\langle (0.4, 0.5, 0.6), (0.3, 0.5, 0.7) \rangle$	$\langle (0.5, 0.6, 0.7), (0.4, 0.7, 0.8) \rangle$
		$\langle (0.8, 0.9, 1.0), (0.8, 1.0, 1.0) \rangle$	$\langle (0.5, 0.6, 0.7), (0.4, 0.7, 0.8) \rangle$	
	2	$\langle (0.1, 0.2, 0.3), (0.0, 0.2, 0.4) \rangle$	$\langle (0.2, 0.3, 0.4), (0.1, 0.3, 0.5) \rangle$	$\langle (0.4, 0.5, 0.6), (0.3, 0.5, 0.7) \rangle$
		$\langle (0.5, 0.6, 0.7), (0.4, 0.7, 0.8) \rangle$	$\langle (0.9, 0.9, 1.0), (0.9, 1.0, 1.0) \rangle$	
	3	$\langle (0.4, 0.5, 0.6), (0.3, 0.5, 0.7) \rangle$	$\langle (0.4, 0.5, 0.6), (0.3, 0.5, 0.7) \rangle$	$\langle (0.1, 0.2, 0.3), (0.0, 0.2, 0.4) \rangle$
	$\langle (0.2, 0.3, 0.4), (0.1, 0.3, 0.5) \rangle$	$\langle (0.0, 0.0, 0.1), (0.0, 0.1, 0.2) \rangle$		
	4	$\langle (0.2, 0.3, 0.4), (0.1, 0.3, 0.5) \rangle$	$\langle (0.1, 0.2, 0.3), (0.0, 0.2, 0.4) \rangle$	$\langle (0.0, 0.0, 0.1), (0.0, 0.1, 0.2) \rangle$
		$\langle (0.5, 0.6, 0.7), (0.4, 0.7, 0.8) \rangle$	$\langle (0.7, 0.8, 0.9), (0.7, 0.9, 1.0) \rangle$	
	5	$\langle (0.5, 0.6, 0.7), (0.4, 0.7, 0.8) \rangle$	$\langle (0.7, 0.8, 0.9), (0.7, 0.9, 1.0) \rangle$	$\langle (0.2, 0.3, 0.4), (0.1, 0.3, 0.5) \rangle$
		$\langle (0.0, 0.0, 0.1), (0.0, 0.1, 0.2) \rangle$	$\langle (0.5, 0.6, 0.7), (0.4, 0.7, 0.8) \rangle$	
A_2	1	$\langle (0.4, 0.5, 0.6), (0.3, 0.5, 0.7) \rangle$	$\langle (0.8, 0.9, 1.0), (0.8, 1.0, 1.0) \rangle$	$\langle (0.5, 0.6, 0.7), (0.4, 0.7, 0.8) \rangle$
		$\langle (0.4, 0.5, 0.6), (0.3, 0.5, 0.7) \rangle$	$\langle (0.0, 0.0, 0.1), (0.0, 0.1, 0.2) \rangle$	
	2	$\langle (0.1, 0.2, 0.3), (0.0, 0.2, 0.4) \rangle$	$\langle (0.4, 0.5, 0.6), (0.3, 0.5, 0.7) \rangle$	$\langle (0.8, 0.9, 1.0), (0.8, 1.0, 1.0) \rangle$
		$\langle (0.5, 0.6, 0.7), (0.4, 0.7, 0.8) \rangle$	$\langle (0.1, 0.2, 0.3), (0.0, 0.2, 0.4) \rangle$	
	3	$\langle (0.7, 0.8, 0.9), (0.7, 0.9, 1.0) \rangle$	$\langle (0.5, 0.6, 0.7), (0.4, 0.7, 0.8) \rangle$	$\langle (0.2, 0.3, 0.4), (0.1, 0.3, 0.5) \rangle$
	$\langle (0.1, 0.2, 0.3), (0.0, 0.2, 0.4) \rangle$	$\langle (0.0, 0.0, 0.1), (0.0, 0.1, 0.2) \rangle$		
	4	$\langle (0.5, 0.6, 0.7), (0.4, 0.7, 0.8) \rangle$	$\langle (0.7, 0.8, 0.9), (0.7, 0.9, 1.0) \rangle$	$\langle (0.2, 0.3, 0.4), (0.1, 0.3, 0.5) \rangle$
		$\langle (0.9, 0.9, 1.0), (0.9, 1.0, 1.0) \rangle$	$\langle (0.0, 0.0, 0.0), (0.0, 0.0, 0.1) \rangle$	
	5	$\langle (0.5, 0.6, 0.7), (0.4, 0.7, 0.8) \rangle$	$\langle (0.2, 0.3, 0.4), (0.1, 0.3, 0.5) \rangle$	$\langle (0.4, 0.5, 0.6), (0.3, 0.5, 0.7) \rangle$
		$\langle (0.0, 0.0, 0.1), (0.0, 0.1, 0.2) \rangle$	$\langle (0.8, 0.9, 1.0), (0.8, 1.0, 1.0) \rangle$	
A_3	1	$\langle (0.2, 0.3, 0.4), (0.1, 0.3, 0.5) \rangle$	$\langle (0.1, 0.2, 0.3), (0.0, 0.2, 0.4) \rangle$	$\langle (0.7, 0.8, 0.9), (0.7, 0.9, 1.0) \rangle$
		$\langle (0.4, 0.5, 0.6), (0.3, 0.5, 0.7) \rangle$	$\langle (0.5, 0.6, 0.7), (0.4, 0.7, 0.8) \rangle$	
	2	$\langle (0.1, 0.2, 0.3), (0.0, 0.2, 0.4) \rangle$	$\langle (0.5, 0.6, 0.7), (0.4, 0.7, 0.8) \rangle$	$\langle (0.2, 0.3, 0.4), (0.1, 0.3, 0.5) \rangle$
		$\langle (0.0, 0.0, 0.0), (0.0, 0.0, 0.1) \rangle$	$\langle (0.9, 0.9, 1.0), (0.9, 1.0, 1.0) \rangle$	
	3	$\langle (0.9, 0.9, 1.0), (0.9, 1.0, 1.0) \rangle$	$\langle (0.4, 0.5, 0.6), (0.3, 0.5, 0.7) \rangle$	$\langle (0.5, 0.6, 0.7), (0.4, 0.7, 0.8) \rangle$
	$\langle (0.0, 0.0, 0.1), (0.0, 0.1, 0.2) \rangle$	$\langle (0.2, 0.3, 0.4), (0.1, 0.3, 0.5) \rangle$		
	4	$\langle (0.1, 0.2, 0.3), (0.0, 0.2, 0.4) \rangle$	$\langle (0.0, 0.0, 0.0), (0.0, 0.0, 0.1) \rangle$	$\langle (0.5, 0.6, 0.7), (0.4, 0.7, 0.8) \rangle$
		$\langle (0.4, 0.5, 0.6), (0.3, 0.5, 0.7) \rangle$	$\langle (0.0, 0.0, 0.1), (0.0, 0.1, 0.2) \rangle$	
	5	$\langle (0.4, 0.5, 0.6), (0.3, 0.5, 0.7) \rangle$	$\langle (0.4, 0.5, 0.6), (0.3, 0.5, 0.7) \rangle$	$\langle (0.2, 0.3, 0.4), (0.1, 0.3, 0.5) \rangle$
		$\langle (0.0, 0.0, 0.1), (0.0, 0.1, 0.2) \rangle$	$\langle (0.7, 0.8, 0.9), (0.7, 0.9, 1.0) \rangle$	
A_4	1	$\langle (0.5, 0.6, 0.7), (0.4, 0.7, 0.8) \rangle$	$\langle (0.5, 0.6, 0.7), (0.4, 0.7, 0.8) \rangle$	$\langle (0.4, 0.5, 0.6), (0.3, 0.5, 0.7) \rangle$
		$\langle (0.2, 0.3, 0.4), (0.1, 0.3, 0.5) \rangle$	$\langle (0.8, 0.9, 1.0), (0.8, 1.0, 1.0) \rangle$	
	2	$\langle (0.4, 0.5, 0.6), (0.3, 0.5, 0.7) \rangle$	$\langle (0.2, 0.3, 0.4), (0.1, 0.3, 0.5) \rangle$	$\langle (0.5, 0.6, 0.7), (0.4, 0.7, 0.8) \rangle$
		$\langle (0.0, 0.0, 0.1), (0.0, 0.1, 0.2) \rangle$	$\langle (0.4, 0.5, 0.6), (0.3, 0.5, 0.7) \rangle$	
	3	$\langle (0.2, 0.3, 0.4), (0.1, 0.3, 0.5) \rangle$	$\langle (0.2, 0.3, 0.4), (0.1, 0.3, 0.5) \rangle$	$\langle (0.4, 0.5, 0.6), (0.3, 0.5, 0.7) \rangle$
	$\langle (0.5, 0.6, 0.7), (0.4, 0.7, 0.8) \rangle$	$\langle (0.7, 0.8, 0.9), (0.7, 0.9, 1.0) \rangle$		
	4	$\langle (0.1, 0.2, 0.3), (0.0, 0.2, 0.4) \rangle$	$\langle (0.0, 0.0, 0.1), (0.0, 0.1, 0.2) \rangle$	$\langle (0.5, 0.6, 0.7), (0.4, 0.7, 0.8) \rangle$
		$\langle (0.2, 0.3, 0.4), (0.1, 0.3, 0.5) \rangle$	$\langle (0.1, 0.2, 0.3), (0.0, 0.2, 0.4) \rangle$	
	5	$\langle (0.7, 0.8, 0.9), (0.7, 0.9, 1.0) \rangle$	$\langle (0.4, 0.5, 0.6), (0.3, 0.5, 0.7) \rangle$	$\langle (0.1, 0.2, 0.3), (0.0, 0.2, 0.4) \rangle$
		$\langle (0.2, 0.3, 0.4), (0.1, 0.3, 0.5) \rangle$	$\langle (0.2, 0.3, 0.4), (0.1, 0.3, 0.5) \rangle$	

步骤3 属性 C_j ($j = 1, 2, \dots, 5$)的参数型直觉三角模糊数型权重为:

$$w_1 = \langle C_1, (0.5, 0.6, 0.7), (0.4, 0.7, 0.8) \rangle, w_2 = \langle C_2, (0.1, 0.2, 0.3), (0.0, 0.2, 0.4) \rangle,$$

$$w_3 = \langle C_3, (0.5, 0.6, 0.7), (0.4, 0.7, 0.8) \rangle, w_4 = \langle C_4, (0.9, 0.9, 1.0), (0.9, 1.0, 1.0) \rangle,$$

$$w_5 = \langle C_5, (0.2, 0.3, 0.4), (0.1, 0.3, 0.5) \rangle .$$

由公式(6-23)可求得每个属性的期望权重值, 再由公式 (6-31) 标准化, 求得5个属性的权重矢量为: $\bar{W} = (0.2315, 0.0741, 0.2315, 0.3519, 0.1111)$ 。

步骤4 决策者给出理想方案的参数型直觉三角模糊数型偏好矢量为:

$$A_{IP} = \{ \langle C_1, (0.4, 0.5, 0.6), (0.3, 0.5, 0.7) \rangle, \langle C_2, (0.7, 0.8, 0.9), (0.7, 0.9, 1.0) \rangle, \\ \langle C_3, (0.8, 0.9, 1.0), (0.8, 1.0, 1.0) \rangle, \langle C_4, (0.7, 0.8, 0.9), (0.7, 0.9, 1.0) \rangle, \\ \langle C_5, (0.5, 0.6, 0.7), (0.4, 0.7, 0.8) \rangle \}.$$

由公式 (6-32) - (6-34), 我们可以得到 $A_i (i = 1, 2, \dots, 5)$ 与理想方案的参数型直觉三角模糊数型偏好矢量之间的加权相似度, 决策结果见表6-6.

表 6-6 三种加权相似度的决策结果

	S^H	S^E	S^F
A_1	0.3433	0.5325	0.6574
A_2	0.4667	0.6181	0.7172
A_3	0.2845	0.4887	0.6306
A_4	0.3535	0.5388	0.6611
排序	$A_2 \succ A_4 \succ A_1 \succ A_3$	$A_2 \succ A_4 \succ A_1 \succ A_3$	$A_2 \succ A_4 \succ A_1 \succ A_3$
最优	A_2	A_2	A_2

步骤5 从表6-6可以看出, 本节提出的三种加权相似度决策结果一致, 最优方案为: A_2 , 因此不同相似度的决策结果一致, 这就表明了本节的方法是可行的。

6.3.5 小结

在这一节中, 我们将从另一个方面把三角模糊数拓展到参数型直觉三角模糊数, 给出了参数型直觉三角模糊数的基本运算法则, 以及参数型直觉三角模糊数的期望值定义, 参数型直觉三角模糊数的期望值可用来确定决策属性的权重。然后利用两个参数型直觉三角模糊数的Hamming距离、Euclidean距离和Hausdorff距离定义两个参数型直觉三角模糊数之间的相似度, 并证明它们满足距离相似度的四个性质。借助于三个距离相似度定义了三个加权相似度, 并在此基础上提出了参数型直觉三角模糊数型偏好多属性大群体决策方法, 由加权相似度大小确定决策方案排序, 在该决策问题中其属性值以及决策方案偏好矢量都是以参数型直觉三角模糊数形式给出的。最后, 讨论了某航空公司选拔安监总经理的案例, 根据加权相似度最大原则, 选出最适合的人, 三种加权相似度的决策结果一致, 这表明本节的方法是可行的、有效的。

6.4 本章小结

在这一章, 我们主要讨论了模糊数及其拓展形式(直觉模糊数、三角模糊数、三角直觉模糊数、参数型直觉三角模糊数), 它们的基本运算法则、期望值

以及两个模糊数、直觉模糊数、三角模糊数、参数型直觉三角模糊数之间的相似度，并基于它们的相似度提出了对应的多属性大群体决策方法，最后通过案例分析讨论本章方法的优势，决策结果表明本章方法是可行的、有效的。本章主要完成的工作有：

(1) 列举了模糊数、直觉模糊数和区间直觉模糊数的形式，以及它们的基本运算法则；

(2) 针对传统的三角模糊数型偏好多属性决策方法不适合解决三角模糊数型偏好多属性大群体决策问题的缺陷，给出三角模糊数的J-相似度、E-相似度和C-相似度，并以此构造了三种相似度的加权相似度，根据加权相似度大小排列决策方案，加权相似度最大者对应最优方案。通过分析应急管理中的人才选拔案例结果，三种加权J-相似度、E-相似度和C-相似度的决策结果一致，这表明该方法是有效的。

(3) 在6.3节，从另一个方面把三角模糊数拓展到参数型直觉三角模糊数，给出其基本运算法则和期望值，用于确定多属性大群体决策问题中决策属性的权重。在两个参数型直觉三角模糊数距离基础上构造它们之间的加权H-相似度、加权E-相似度和加权F-相似度，用于确定多属性大群体决策问题中决策方案的顺序，加权相似度最大的对应最优方案。最后讨论一实际案例，其决策结果表明6.3节的方法是可行的。

7 基于梯形模糊数偏好的多属性大群体决策方法

本章继续研究基于模糊数的拓展形式（梯形模糊数^[146]、参数型直觉梯形模糊数^[41]、区间梯形模糊数^[38]）的基本运算法则以及它们的相似度，并基于此相似度提出模糊偏好下大群体决策方法。在这一章中主要介绍梯形模糊数、梯形模糊数的运算法则以及基于梯形模糊数间相似度的多属性大群体决策方法，以及参数型直觉梯形模糊数和两参数型直觉梯形模糊数期望矢量之间的相似度，并基于此提出参数型直觉梯形模糊数偏好多属性决策方法，并考虑决策属性间二元关系给出参数型直觉梯形模糊数型偏好多属性大群体决策方法，最后给出区间直觉梯形模糊数以及它们之间的相似度，构造区间直觉梯形模糊数偏好型多属性大群体决策方法。

7.1 改进的TOPSIS方法在梯形模糊偏好多属性决策问题中的应用

国内外许多学者研究了梯形模糊数^{[147]-[148]}的基本性质、给出了它的期望值^[149]和两个梯形模糊数的距离^{[150]-[151]}。这些为梯形模糊数型多属性大群体决策提供了理论依据。近年来，关于梯形模糊数及其拓展形式（直觉梯形模糊数和区间梯形模糊数）在多属性决策中的应用刚刚起步，许多学者将传统的决策方法引入到梯形模糊数型多属性决策问题中。左春荣在文献^[152]用梯形模糊数表示决策者的偏好和决策权重，由偏好矩阵和权重向量构造出加权决策矩阵，通过期望值计算和归一化处理得到规范化的决策矩阵，采用OWA算子进行集结，综合属性权重得到决策结果。朱灏在文献^[153]采用一种折中型模糊多属性决策方法对工程中的总体方案进行评估。基于折中型模糊多属性决策方法的思想 and 梯形模糊数期望的计算公式，提出了梯形模糊数的相关定义和公式，给出语言多指标决策问题的折中型分析法。陈业华在文献^[154]，对原有的多维偏好分析线性规划方法进行改进，利用模糊理想解法和广义加权距离，定义了群一致度和群不一致度，并建立了基于梯形模糊数的多属性多维偏好群体决策模型。但上述方法不适合梯形模糊数型偏好多属性大群体决策问题。因此，本节用TOPSIS方法来解梯形模糊多属性大群体决策问题。

7.1.1 梯形模糊数及其性质

定义7.1 设 $\alpha = (a, b, c, d)$ 是实数集 R 上的梯形模糊数，其中 $0 < a \leq b \leq c \leq d < \infty$ ，则称 α 为梯形模糊数，其隶属函数 $\mu_\alpha(x)$ 定义如下：

$$\mu_\alpha(x) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b, \\ 1, & b \leq x \leq c, \\ \frac{x-d}{c-d}, & c \leq x \leq d, \\ 0, & d < x. \end{cases} \quad (7-1)$$

为了直观的描述梯形模糊数，我们给出它的隶属函数图形，如图7-1。

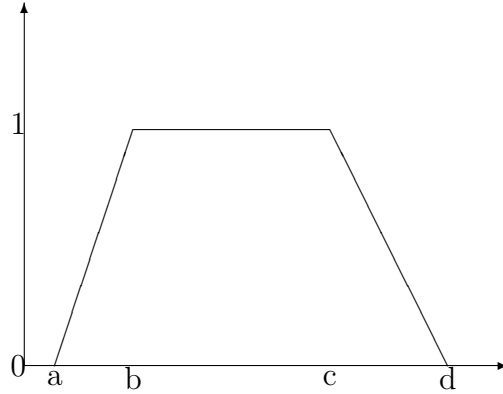


图 7-1 梯形模糊数的隶属函数图

特别地，当 $b = c$ 时，梯形模糊数退化成三角模糊数。对于一个实数 β 也可以写成梯形模糊数的形式 $(\beta, \beta, \beta, \beta)$ ，区间数 $[\beta, \gamma]$ 也可以由梯形模糊数表示为 $(\beta, \beta, \gamma, \gamma)$ 。事实上，梯形模糊数是模糊数的特殊形式。

设 $\alpha = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ 和 $\beta = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ 是实数集上的两个梯形模糊数， γ 是任意的正实数，那么梯形模糊数的基本运算法则如下：

$$\begin{aligned} \alpha \oplus \beta &= (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3, a_4 + b_4), \\ \alpha \otimes \beta &= (a_1 b_1, a_2 b_2, a_3 b_3, a_4 b_4), \\ \gamma \otimes \alpha &= (\gamma a_1, \gamma a_2, \gamma a_3, \gamma a_4), \\ \frac{1}{\alpha} &= \left(\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_3}, \frac{1}{a_4} \right). \end{aligned}$$

定义7.2 设 $\alpha = (a, b, c, d)$ 是实数集 R 上的梯形模糊数，其中 $0 < a \leq b \leq c \leq d < \infty$ ，梯形模糊数 α 的期望值定义如下：

$$EV(\alpha) = \frac{1}{2}[E_-(\alpha) + E_+(\alpha)], \quad (7-2)$$

其中， $E_-(\alpha) = \frac{a+b}{2}$ ， $E_+(\alpha) = \frac{c+d}{2}$ 。

定理 7.1. 设 $\alpha = (a, b, c, d)$ 是实数集 R 的梯形模糊数，且 $a, b, c, d \in R$ ，那么当

$$\begin{aligned} E_-(\alpha) &= \frac{a+b}{2}, \\ E_+(\alpha) &= \frac{c+d}{2}, \end{aligned}$$

则 α 的期望值为:

$$EV(\alpha) = \frac{1}{4}(a + b + c + d). \quad (7-3)$$

定理7.1显然成立, 这里不再证明。

定义7.3 设 $\alpha = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ 和 $\beta = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ 是实数集上的两个梯形模糊数, 它们之间的欧氏距离为:

$$S_O = \sqrt{\sum_i^4 (a_i - b_i)^2}. \quad (7-4)$$

很显然, 定义7.3满足下面距离相似度的性质, 这里不再一一证明。

- (P1) $0 \leq S_O(\alpha, \beta) \leq 1$,
- (P2) $S_O(\alpha, \beta) = 1$, if $\alpha = \beta$,
- (P3) $S_O(\alpha, \beta) = S(\beta, \alpha)$,
- (P4) $S_O(\alpha, \gamma) \leq S_O(\alpha, \beta)$, $S(\alpha, \gamma) \leq S(\beta, \gamma)$, $\alpha \leq \beta \leq \gamma$, $\alpha, \beta, \gamma \in R$.

7.1.2 改进TOPSIS方法及应用

在实际生活中, 许多多属性决策问题, 由于决策信息的模糊性和不确定性, 很难找到定量的方法来解决。对于这类问题, 往往需要决策者根据自身的知识和经验使用语言形式^[155]的评价信息(如优、良、中、可、差)来表达自己的偏好。同时, 为了追求决策的科学性, 避免因个人的主观判断、选择和偏好程度对决策结果产生不良影响, 常常需要综合多个决策者的群体智慧和经验^[156]。因此, 近几年来基于语言决策信息的多属性群决策问题受到了广泛的重视^[157]。

本节研究的模糊环境下多属性大群体决策问题, 决策问题描述如下: 假设有 p 个可行方案 $\{A_1, A_2, \dots, A_p\}$, n 个决策属性记为: $\{C_1, C_2, \dots, C_n\}$, 决策属性权重值、决策属性值均为语言值。决策者邀请 m 个决策专家进行评价, 第 k 个决策专家对决策属性权重的偏好值为 $w^k = (w_1^k, w_2^k, \dots, w_n^k)$, 对决策方案 A_i , 对第 j 个决策属性 C_j 进行评价, 得到 A_i 关于属性 C_j 的评价值 t_{ij}^k , 记模糊偏好决策矩阵 T^k 为:

$$T^k = (t_{ij}^k)_{n \times p} = \begin{pmatrix} t_{11}^k & t_{12}^k & \dots & t_{1p}^k \\ t_{21}^k & t_{22}^k & \dots & t_{2p}^k \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ t_{n1}^k & t_{n2}^k & \dots & t_{np}^k \end{pmatrix}.$$

其中元素 $t_{ij}^k = (a_{ij}^k, b_{ij}^k, c_{ij}^k, d_{ij}^k)$ ($i = 1, 2, \dots, p; j = 1, 2, \dots, n; k = 1, 2, \dots, m$)为梯形模糊数。

本文采用的评语值^{[158],[159]}分别为{很差, 差, 较差, 一般, 较好, 好, 很好}, 利用梯形模糊数和语言值的对照表(见表7-1)将语言值转化为标准的梯形模糊数, 采用简单的加权集中方法得到决策专家的群体偏好如下:

$$t_{ij} = \frac{1}{m}(t_{ij}^1 + t_{ij}^2 + \dots + t_{ij}^m); \tag{7-5}$$

$$w_j = \frac{1}{m}(w_j^1 + w_j^2 + \dots + w_j^m). \tag{7-6}$$

从而得到模糊梯形数决策矩阵 T 和属性权重 W 。其中 $t_{ij} = (a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}, d_{ij})$, $W = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ 。

$$T = (t_{ij})_{n \times p} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1p} \\ t_{21} & t_{22} & \dots & t_{2p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ t_{n1} & t_{n2} & \dots & t_{np} \end{pmatrix}.$$

基于改进的TOPSIS方法的梯形模糊偏好大群体决策问题的计算步骤如下:

步骤1 决策专家给出每个 A_i ($i = 1, 2, \dots, p$)和每个属性 C_j ($j = 1, 2, \dots, n$)的语言值, 利用表7-1将语言值转化为标准的梯形模糊数;

语言形式	梯形模糊数
很差 t_0	(0.0, 0.0, 0.1, 0.1)
差 t_1	(0.0, 0.1, 0.2, 0.3)
较差 t_2	(0.2, 0.2, 0.3, 0.4)
一般 t_3	(0.3, 0.3, 0.4, 0.5)
较好 t_4	(0.6, 0.7, 0.8, 0.9)
好 t_5	(0.7, 0.8, 0.9, 1.0)
很好 t_6	(0.9, 0.9, 1.0, 1.0)

步骤2 由公式(7-5)和(7-6)可求得方案 A_i ($i = 1, 2, \dots, p$)和属性 C_j ($j = 1, 2, \dots, n$)的群体偏好, 并得到各个方案的群决策矩阵 T^U ;

步骤3 由(7-3)式求得期望权重矢量为, 再根据(6-31)式, 将期望权重矢量标准化得到 n 个决策属性的权重矢量为 $\bar{W} = (\bar{w}_1, \bar{w}_2, \dots, \bar{w}_n)$ 。

步骤4 由OWA算子, 可得到每个方案 A_i ($i = 1, 2, \dots, p$)的加权群偏好矢量, 组成加权群偏好矩阵为:

$$\bar{T}^U = \begin{pmatrix} \bar{w}_1 t_{11} & \bar{w}_1 t_{12} & \dots & \bar{w}_1 t_{1p} \\ \bar{w}_2 t_{21} & \bar{w}_2 t_{22} & \dots & \bar{w}_2 t_{2p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \bar{w}_n t_{n1} & \bar{w}_n t_{n2} & \dots & \bar{w}_n t_{np} \end{pmatrix}.$$

步骤5 确定方案的模糊正理想解 V^+ 和模糊负理想解 V^- ,

$$V^+ = \text{Max}\{\bar{w}_1T(1), \bar{w}_2T(2), \dots, \bar{w}_nT(n)\}, \quad (7-7)$$

$$V^- = \text{Min}\{\bar{w}_1T(1), \bar{w}_2T(2), \dots, \bar{w}_nT(n)\}, \quad (7-8)$$

其中 $T(i)$ 是矩阵 T 的第 i 行。由(7-4)拓展可得到每个方案与正理想解和负理想解之间的欧氏距离为： S_O^+ 和 S_O^- 。

$$S_O^+ = \sum_{j=1}^n \sqrt{\sum_{i=1}^4 (\bar{t}_{ij} - v_{ij}^+)^2}, \quad (7-9)$$

$$S_O^- = \sum_{j=1}^n \sqrt{\sum_{i=1}^4 (\bar{t}_{ij} - v_{ij}^-)^2}. \quad (7-10)$$

步骤6 确定方案 A_i 与模糊正理想解 V^+ 之间的相对贴近度:

$$RS_O^+ = \frac{S_O^+}{S_O^+ + S_O^-}. \quad (7-11)$$

步骤7 按照最大贴近度原则选择最优方案。

7.1.3 案例分析

某市应急管理办公室要建设一个应急资源储备仓库，该项目需要招标，参加投标的有四个公司对应本节的决策方案，记为 A_1 、 A_2 、 A_3 和 A_4 ，政府决策者组邀请6个专家成的评估小组，记为 G_1 、 G_2 、 G_3 、 G_4 、 G_5 和 G_6 ，评估目标（决策属性）为：(1)公司以往的项目的工程质量(C_1)；(2)施工工期(C_2)；(3)公司给出的设计方案(C_3)；(4)投标价格(C_4)。6个决策专家从语言值集{很差，差，较差，一般，较好，好，很好}，简记为 $\{t_0, t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6\}$ 对上述四个公司进行评价，得到每个专家和属性的语言决策矩阵为：

$$T^1 = \begin{pmatrix} t_3 & t_1 & t_5 & t_4 \\ t_4 & t_4 & t_5 & t_4 \\ t_5 & t_5 & t_4 & t_1 \\ t_3 & t_5 & t_1 & t_5 \end{pmatrix}, T^2 = \begin{pmatrix} t_4 & t_4 & t_4 & t_1 \\ t_4 & t_3 & t_5 & t_4 \\ t_4 & t_5 & t_5 & t_1 \\ t_1 & t_4 & t_3 & t_4 \end{pmatrix}, T^3 = \begin{pmatrix} t_3 & t_4 & t_5 & t_4 \\ t_4 & t_5 & t_5 & t_3 \\ t_1 & t_4 & t_3 & t_3 \\ t_4 & t_1 & t_1 & t_5 \end{pmatrix},$$

$$T^4 = \begin{pmatrix} t_2 & t_1 & t_3 & t_4 \\ t_4 & t_6 & t_1 & t_4 \\ t_3 & t_5 & t_5 & t_1 \\ t_2 & t_4 & t_1 & t_5 \end{pmatrix}, T^5 = \begin{pmatrix} t_1 & t_4 & t_5 & t_1 \\ t_4 & t_2 & t_2 & t_4 \\ t_4 & t_2 & t_6 & t_1 \\ t_1 & t_3 & t_3 & t_0 \end{pmatrix}, T^6 = \begin{pmatrix} t_2 & t_4 & t_5 & t_4 \\ t_4 & t_4 & t_5 & t_3 \\ t_1 & t_3 & t_3 & t_5 \\ t_4 & t_0 & t_1 & t_4 \end{pmatrix},$$

$$T^C = \begin{pmatrix} t_5 & t_2 & t_3 & t_2 \\ t_6 & t_6 & t_1 & t_5 \\ t_4 & t_5 & t_2 & t_1 \\ t_4 & t_4 & t_4 & t_4 \\ t_6 & t_2 & t_5 & t_3 \\ t_2 & t_3 & t_0 & t_5 \end{pmatrix}.$$

根据7.1.2节的改进的TOPSIS方法，该决策问题的决策步骤如下：

步骤1 将上述语言矩阵转化为标准的梯形模糊数矩阵为：

$$T^1 = \begin{pmatrix} (0.3, 0.3, 0.4, 0.5) & (0.0, 0.1, 0.2, 0.3) & (0.7, 0.8, 0.9, 1.0) & (0.6, 0.7, 0.8, 0.9) \\ (0.6, 0.7, 0.8, 0.9) & (0.6, 0.7, 0.8, 0.9) & (0.7, 0.8, 0.9, 1.0) & (0.6, 0.7, 0.8, 0.9) \\ (0.7, 0.8, 0.9, 1.0) & (0.7, 0.8, 0.9, 1.0) & (0.6, 0.7, 0.8, 0.9) & (0.0, 0.1, 0.2, 0.3) \\ (0.3, 0.3, 0.4, 0.5) & (0.7, 0.8, 0.9, 1.0) & (0.0, 0.1, 0.2, 0.3) & (0.7, 0.8, 0.9, 1.0) \end{pmatrix},$$

$$T^2 = \begin{pmatrix} (0.6, 0.7, 0.8, 0.9) & (0.6, 0.7, 0.8, 0.9) & (0.6, 0.7, 0.8, 0.9) & (0.0, 0.1, 0.2, 0.3) \\ (0.6, 0.7, 0.8, 0.9) & (0.3, 0.3, 0.4, 0.5) & (0.7, 0.8, 0.9, 1.0) & (0.6, 0.7, 0.8, 0.9) \\ (0.6, 0.7, 0.8, 0.9) & (0.7, 0.8, 0.9, 1.0) & (0.7, 0.8, 0.9, 1.0) & (0.0, 0.1, 0.2, 0.3) \\ (0.0, 0.1, 0.2, 0.3) & (0.6, 0.7, 0.8, 0.9) & (0.3, 0.3, 0.4, 0.5) & (0.6, 0.7, 0.8, 0.9) \end{pmatrix},$$

$$T^3 = \begin{pmatrix} (0.3, 0.3, 0.4, 0.5) & (0.6, 0.7, 0.8, 0.9) & (0.7, 0.8, 0.9, 1.0) & (0.6, 0.7, 0.8, 0.9) \\ (0.6, 0.7, 0.8, 0.9) & (0.7, 0.8, 0.9, 1.0) & (0.7, 0.8, 0.9, 1.0) & (0.3, 0.3, 0.4, 0.5) \\ (0.0, 0.1, 0.2, 0.3) & (0.6, 0.7, 0.8, 0.9) & (0.3, 0.3, 0.4, 0.5) & (0.3, 0.3, 0.4, 0.5) \\ (0.6, 0.7, 0.8, 0.9) & (0.0, 0.1, 0.2, 0.3) & (0.0, 0.1, 0.2, 0.3) & (0.7, 0.8, 0.9, 1.0) \end{pmatrix},$$

$$T^4 = \begin{pmatrix} (0.2, 0.2, 0.3, 0.4) & (0.0, 0.1, 0.2, 0.3) & (0.3, 0.3, 0.4, 0.5) & (0.6, 0.7, 0.8, 0.9) \\ (0.6, 0.7, 0.8, 0.9) & (0.9, 0.9, 1.0, 1.0) & (0.0, 0.1, 0.2, 0.3) & (0.6, 0.7, 0.8, 0.9) \\ (0.3, 0.3, 0.4, 0.5) & (0.7, 0.8, 0.9, 1.0) & (0.7, 0.8, 0.9, 1.0) & (0.0, 0.1, 0.2, 0.3) \\ (0.2, 0.2, 0.3, 0.4) & (0.6, 0.7, 0.8, 0.9) & (0.0, 0.1, 0.2, 0.3) & (0.7, 0.8, 0.9, 1.0) \end{pmatrix},$$

$$T^5 = \begin{pmatrix} (0.0, 0.1, 0.2, 0.3) & (0.6, 0.7, 0.8, 0.9) & (0.7, 0.8, 0.9, 1.0) & (0.0, 0.1, 0.2, 0.3) \\ (0.6, 0.7, 0.8, 0.9) & (0.2, 0.2, 0.3, 0.4) & (0.2, 0.2, 0.3, 0.4) & (0.6, 0.7, 0.8, 0.9) \\ (0.6, 0.7, 0.8, 0.9) & (0.2, 0.2, 0.3, 0.4) & (0.9, 0.9, 1.0, 1.0) & (0.0, 0.1, 0.2, 0.3) \\ (0.0, 0.1, 0.2, 0.3) & (0.3, 0.3, 0.4, 0.5) & (0.3, 0.3, 0.4, 0.5) & (0.0, 0.0, 0.1, 0.1) \end{pmatrix},$$

$$T^6 = \begin{pmatrix} (0.2, 0.2, 0.3, 0.4) & (0.6, 0.7, 0.8, 0.9) & (0.7, 0.8, 0.9, 1.0) & (0.6, 0.7, 0.8, 0.9) \\ (0.6, 0.7, 0.8, 0.9) & (0.6, 0.7, 0.8, 0.9) & (0.7, 0.8, 0.9, 1.0) & (0.3, 0.3, 0.4, 0.5) \\ (0.0, 0.1, 0.2, 0.3) & (0.3, 0.3, 0.4, 0.5) & (0.3, 0.3, 0.4, 0.5) & (0.7, 0.8, 0.9, 1.0) \\ (0.6, 0.7, 0.8, 0.9) & (0.0, 0.0, 0.1, 0.1) & (0.0, 0.1, 0.2, 0.3) & (0.6, 0.7, 0.8, 0.9) \end{pmatrix},$$

$$T^C = \begin{pmatrix} (0.7, 0.8, 0.9, 1.0) & (0.2, 0.2, 0.3, 0.4) & (0.3, 0.3, 0.4, 0.5) & (0.2, 0.2, 0.3, 0.4) \\ (0.9, 0.9, 1.0, 1.0) & (0.9, 0.9, 1.0, 1.0) & (0.0, 0.1, 0.2, 0.3) & (0.7, 0.8, 0.9, 1.0) \\ (0.6, 0.7, 0.8, 0.9) & (0.7, 0.8, 0.9, 1.0) & (0.2, 0.2, 0.3, 0.4) & (0.0, 0.1, 0.2, 0.3) \\ (0.6, 0.7, 0.8, 0.9) & (0.6, 0.7, 0.8, 0.9) & (0.6, 0.7, 0.8, 0.9) & (0.6, 0.7, 0.8, 0.9) \\ (0.9, 0.9, 1.0, 1.0) & (0.2, 0.2, 0.3, 0.4) & (0.7, 0.8, 0.9, 1.0) & (0.3, 0.3, 0.4, 0.5) \\ (0.2, 0.2, 0.3, 0.4) & (0.3, 0.3, 0.4, 0.5) & (0.0, 0.0, 0.1, 0.1) & (0.7, 0.8, 0.9, 1.0) \end{pmatrix}.$$

步骤2 由公式 (7-5) 和 (7-6) 可求得方案 A_i ($i = 1, 2, \dots, 4$) 和属性 C_j ($j = 1, 2, \dots, 4$) 的群体偏好决策矩阵 T^U 为:

$$T^U = \begin{pmatrix} (0.3, 0.3, 0.4, 0.5) & (0.4, 0.5, 0.6, 0.7) & (0.6, 0.7, 0.8, 0.9) & (0.4, 0.5, 0.6, 0.7) \\ (0.6, 0.7, 0.8, 0.9) & (0.6, 0.6, 0.7, 0.8) & (0.5, 0.6, 0.7, 0.8) & (0.5, 0.6, 0.7, 0.8) \\ (0.4, 0.5, 0.6, 0.7) & (0.5, 0.6, 0.7, 0.8) & (0.6, 0.6, 0.7, 0.8) & (0.2, 0.3, 0.4, 0.5) \\ (0.3, 0.4, 0.4, 0.6) & (0.4, 0.4, 0.5, 0.7) & (0.1, 0.2, 0.3, 0.4) & (0.6, 0.6, 0.7, 0.9) \end{pmatrix}.$$

权重群体偏好矢量为:

$$\bar{W}^G = \{ \langle C_1, (0.65, 0.70, 0.80, 0.8667) \rangle, \langle C_2, (0.4833, 0.5167, 0.6167, 0.70) \rangle, \langle C_3, (0.30, 0.35, 0.45, 0.5333) \rangle, \langle C_4, (0.4167, 0.4833, 0.5833, 0.6833) \rangle \}.$$

步骤3 由 (7-3) 式求得期望权重矢量为:

$$EV(W^G) = (0.7542, 0.5792, 0.4083, 0.5416),$$

由 (6-31) 式, 标准化得到4个决策属性的权重矢量为:

$$\bar{W}^G = (0.3303, 0.2537, 0.1788, 0.2372),$$

步骤4 由OWA算子, 可得到每个方案 A_i ($i = 1, 2, \dots, p$) 的加权群偏好矢量,

组成加权群偏好矩阵为为：

$$\bar{T}^U = \begin{pmatrix} 0.3303(0.3, 0.3, 0.4, 0.5) & 0.2537(0.4, 0.5, 0.6, 0.7) & 0.1788(0.6, 0.7, 0.8, 0.9) & \\ 0.2372(0.4, 0.5, 0.6, 0.7) & & & \\ 0.3303(0.6, 0.7, 0.8, 0.9) & 0.2537(0.6, 0.6, 0.7, 0.8) & 0.1788(0.5, 0.6, 0.7, 0.8) & \\ 0.2372(0.5, 0.6, 0.7, 0.8) & & & \\ 0.3303(0.4, 0.5, 0.6, 0.7) & 0.2537(0.5, 0.6, 0.7, 0.8) & 0.1788(0.6, 0.6, 0.7, 0.8) & \\ 0.2372(0.2, 0.3, 0.4, 0.5) & & & \\ 0.3303(0.3, 0.4, 0.4, 0.6) & 0.2537(0.4, 0.4, 0.5, 0.7) & 0.1788(0.1, 0.2, 0.3, 0.4) & \\ 0.2372(0.6, 0.6, 0.7, 0.9) & & & \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (0.1, 0.1, 0.1, 0.2) & (0.1, 0.2, 0.2, 0.2) & (0.2, 0.2, 0.3, 0.3) & (0.1, 0.2, 0.2, 0.2) \\ (0.2, 0.2, 0.2, 0.2) & (0.1, 0.2, 0.2, 0.2) & (0.1, 0.1, 0.1, 0.2) & (0.1, 0.1, 0.2, 0.2) \\ (0.1, 0.1, 0.1, 0.1) & (0.1, 0.1, 0.1, 0.1) & (0.1, 0.1, 0.1, 0.1) & (0.0, 0.0, 0.1, 0.1) \\ (0.1, 0.1, 0.1, 0.1) & (0.1, 0.1, 0.1, 0.1) & (0.0, 0.0, 0.1, 0.1) & (0.1, 0.2, 0.2, 0.2) \end{pmatrix}.$$

步骤5 由公式 (7-7) 和 (7-8) 确定方案的模糊正理想解 V^+ 和模糊负理想解 V^- 分别为：

$$V^+ = \{ \langle C_1, (0.2, 0.2, 0.2, 0.2) \rangle, \langle C_2, (0.1, 0.2, 0.2, 0.2) \rangle, \langle C_3, (0.2, 0.2, 0.3, 0.3) \rangle, \langle C_4, (0.1, 0.2, 0.2, 0.2) \rangle \}.$$

$$V^- = \{ \langle C_1, (0.1, 0.1, 0.1, 0.1) \rangle, \langle C_2, (0.1, 0.1, 0.1, 0.1) \rangle, \langle C_3, (0.0, 0.0, 0.1, 0.1) \rangle, \langle C_4, (0.0, 0.0, 0.1, 0.1) \rangle \}.$$

由 (7-9) 和 (7-10) 每个方案与正理想解和负理想解之间的欧氏距离为： S_O^+ 和 S_O^- 。

$$S_{O_1}^+ = 0.1463, S_{O_2}^+ = 0.2678, S_{O_3}^+ = 0.8476, S_{O_4}^+ = 0.7641;$$

$$S_{O_1}^- = 0.8533, S_{O_2}^- = 0.7318, S_{O_3}^- = 0.1510, S_{O_4}^- = 0.2360.$$

步骤6 由 (7-11) 确定方案模糊正理想解 V^+ 之间的相对贴近度：

$$RS_{O_1}^+ = 0.1464, RS_{O_2}^+ = 0.2679, RS_{O_3}^+ = 0.8489, RS_{O_4}^+ = 0.7640.$$

步骤7 根据最大贴近度原则，最优方案为 A_3 。

7.1.4 小结

在这一节中，我们给出了梯形模糊数、梯形模糊数的基本运算法则、梯形模糊数的期望值，以及两个梯形模糊数之间的欧氏距离。用语言值来表达决策专家的偏好，改进传统的TOPSIS方法，提出了基于多属性大群体问题的改进

的TOPSIS方法,在该方法中确定群体偏好矩阵、正理想解和负理想解,通过计算群体偏好矩阵中各个方案的偏好矢量与正理想解、负理想解之间的欧氏距离,定义了相对贴近度,由最大相对贴近度择优。最后,讨论了某应急办招标的案例,根据相对贴近度最大原则,选出最适合的公司,决策结果表明本节的方法是可行的、有效的。

7.2 基于参数型直觉梯形模糊数偏好的多属性决策方法

近年来,关于直觉梯形模糊数在多属性决策中的应用刚刚起步,许多学者将传统的方法引入到直觉梯形模糊决策问题中。文献^[36]定义了直觉梯形模糊数的期望值得分函数、精确函数和几何平均算子,并给出了在多属性多方案群决策问题中的应用。相似度作为解决模糊偏好下多属性决策问题的有效方法,在参数型直觉梯形模糊决策问题应用较少,文献^[40]把参数型直觉梯形模糊数看成一矢量,利用已有的两矢量间的相似度,解决模糊多属性决策问题,但是计算较为复杂,而对于理想方案的确定过于笼统,但C-相似度决策结果与其它两种方法不一致。文献^[160]采用参数型直觉梯形模糊数刻画专家的评价信息,通过混合集成算子得到方案的群体综合评估值,根据期望值和预期得分给出群决策结果。文献^[161]给出了参数型直觉梯形模糊数的期望值和散度的定义,并依据期望值越大、散度越小越优原则,构造了排序参数型直觉梯形模糊数的排序指标,进而提出了一种基于优势度指标的参数型直觉梯形模糊数的排序方法。参数型直觉梯形模糊数含有8个参数,传统的方法解决参数型直觉梯形模糊多属性决策问题计算量大,实际应用比较复杂。本节考虑参考文献中决策方法的不足,用参数型直觉梯形模糊数的期望值表示决策信息,利用矢量空间的相似度模型,构造一种新的相似度模型,并证明它满足相似度所具有的性质。用语言值对应的参数型直觉梯形模糊数来表示决策方案的信息,计算决策方案的期望矢量,由相对相似度公式,分别计算出每个方案与正理想方案和负理想方案的相似度,通过相对相似度大小对决策方案进行排序,选出最优方案。最后给出一案例,来讨论本节方法的可行性,从数值结果中可以看出本节方法的实用性和有效性。

7.2.1 参数型直觉梯形模糊数及相似度

本节主要介绍参数型直觉梯形模糊数的相关概念,以及矢量空间中两矢量间的相似度。

Ye在文献^[40]和^[41]拓展了Grzegorewski的直觉模糊数的定义,给出了参数型直觉梯形模糊的形式,其定义如下:

定义7.4 设 $a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, b_3, b_4$ 是实数集 R 上的实数,且 $b_1 \leq a_1 \leq b_2 \leq a_2 \leq b_3 \leq a_3 \leq a_4 \leq b_4$,实数集 R 上的参数型直觉梯形模糊数 $\alpha = \langle$

$(a_1, a_2, a_3, a_4), (b_1, b_2, b_3, b_4) >$, 其隶属函数和非隶属函数分别定义为:

$$\mu_\alpha(x) = \begin{cases} 0, & x < a_1, \\ \frac{x-a_1}{a_2-a_1}, & a_1 \leq x \leq a_2, \\ 1, & a_2 < x < a_3, \\ \frac{x-a_4}{a_3-a_4}, & a_3 \leq x \leq a_4, \\ 0, & a_4 < x, \end{cases} \quad (7-12)$$

$$\nu_\alpha(x) = \begin{cases} 0, & x < b_1, \\ \frac{x-b_1}{b_2-b_1}, & b_1 \leq x \leq b_2, \\ 1, & b_2 < x < b_3, \\ \frac{x-b_3}{b_4-b_3}, & b_3 \leq x \leq b_4, \\ 0, & b_4 < x, \end{cases} \quad (7-13)$$

实际上, 定义7.4是直觉模糊数的一种特殊形式。为了直观的描述参数型直觉梯形模糊数, 我们给出它的隶属函数和非隶属函数图形, 如图7-2。

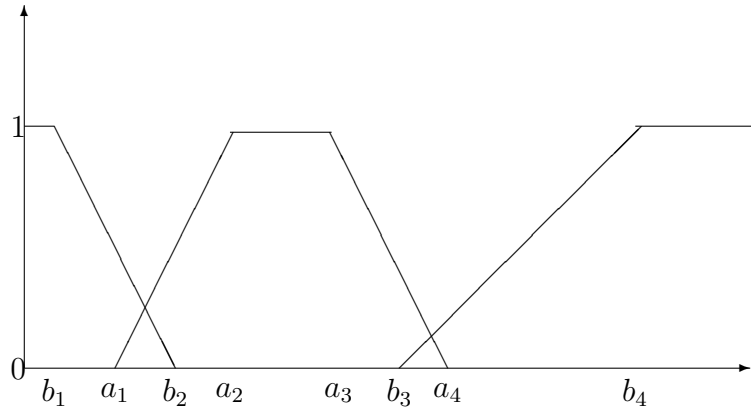


图 7-2 参数型直觉梯形模糊数的隶属函数和非隶属函数图

对于参数型直觉梯形模糊数, 有如下的运算法则: 设 $\alpha_1 = \langle (a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}), (b_{11}, b_{12}, b_{13}, b_{14}) \rangle$ 和 $\alpha_2 = \langle (a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{24}), (b_{21}, b_{22}, b_{23}, b_{24}) \rangle$, 是两个参数型直觉梯形模糊数, 且 γ 是正实数, 那么

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \langle (a_{11} + a_{21}, a_{12} + a_{22}, a_{13} + a_{23}, a_{14} + a_{24}), (b_{11} + b_{21}, b_{12} + b_{22}, b_{13} + b_{23}, b_{14} + b_{24}) \rangle .$$

$$\gamma\alpha_1 = \langle (\gamma a_{11}, \gamma a_{12}, \gamma a_{13}, \gamma a_{14}), (\gamma b_{11}, \gamma b_{12}, \gamma b_{13}, \gamma b_{14}) \rangle .$$

Ye在文献^[40]给出参数型直觉梯形模糊数的期望值, 以及两个参数型直觉梯形模糊数的比较法则。

定义7.5 设 $\alpha = \langle (a_1, a_2, a_3, a_4), (b_1, b_2, b_3, b_4) \rangle$ 是实数集 R 上的一个参数型直觉梯形模糊数, $\mu_\alpha(x)$ 、 $\nu_\alpha(x)$ 的定义如 (6-2) 和 (6-3) 式, 则其期望值为:

$$EV(\alpha) = \frac{E_*(\alpha) + E^*(\alpha)}{2}, \quad (7-14)$$

其中:

$$E_*(\alpha) = \frac{b_1 + a_2}{2} + \frac{1}{2} \int_{b_1}^{b_2} h_\alpha(x) dx - \frac{1}{2} \int_{a_1}^{a_2} f_\alpha(x) dx, \quad (7-15)$$

$$E^*(\alpha) = \frac{b_4 + a_3}{2} + \frac{1}{2} \int_{a_3}^{a_4} g_\alpha(x) dx - \frac{1}{2} \int_{b_3}^{b_4} k_\alpha(x) dx, \quad (7-16)$$

定理 7.2. 设 α 是实数集 R 的参数型直觉梯形模糊数, 特别地当

$$\begin{aligned} f_\alpha(x) &= \frac{x - a_1}{a_2 - a_1}, \\ g_\alpha(x) &= \frac{x - a_4}{a_3 - a_4}, \\ h_\alpha(x) &= \frac{x - b_2}{b_1 - b_2}, \\ k_\alpha(x) &= \frac{x - b_3}{b_4 - b_3}, \end{aligned}$$

则 α 的期望值为:

$$EV(\alpha) = \frac{1}{8}(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + b_1 + b_2 + b_3 + b_4). \quad (7-17)$$

证明. 由公式 (7-15), 可求得

$$\begin{aligned} E_*(\alpha) &= \frac{b_1 + a_2}{2} + \frac{1}{2} \int_{b_1}^{b_2} \frac{x - b_2}{b_1 - b_2} dx - \frac{1}{2} \int_{a_1}^{a_2} \frac{x - a_1}{a_2 - a_1} dx \\ &= \frac{b_1 + a_2}{2} + \frac{1}{2(b_1 - b_2)} \times \left(\frac{1}{2}x^2 - b_1x \right) \Big|_{b_1}^{b_2} - \frac{1}{2(a_2 - a_1)} \times \left(\frac{1}{2}x^2 - a_1x \right) \Big|_{a_1}^{a_2} \\ &= \frac{b_1 + a_2}{2} + \frac{b_2 - b_1}{4} + \frac{a_1 - a_2}{4} \\ &= \frac{b_2 + a_2 + b_1 + a_1}{4}. \end{aligned} \quad (7-18)$$

同理, 由公式 (7-16), 可求得

$$\begin{aligned} E^*(\alpha) &= \frac{b_4 + a_3}{2} + \frac{1}{2} \int_{a_3}^{a_4} \frac{x - a_4}{a_3 - a_4} dx - \frac{1}{2} \int_{b_3}^{b_4} \frac{x - b_3}{b_4 - b_3} dx \\ &= \frac{b_4 + a_3}{2} + \frac{1}{2(a_3 - a_4)} \times \left(\frac{1}{2}x^2 - a_3x \right) \Big|_{a_3}^{a_4} - \frac{1}{2(b_4 - b_3)} \times \left(\frac{1}{2}x^2 - b_2x \right) \Big|_{b_3}^{b_4} \\ &= \frac{b_4 + a_3}{2} + \frac{a_4 - a_3}{4} + \frac{b_3 - b_4}{4} \\ &= \frac{b_3 + a_3 + b_4 + a_4}{4}. \end{aligned} \quad (7-19)$$

把等式 (7-18) 和 (7-19) 代入 (7-16), 可以得到参数型直觉梯形模糊数的期望值为:

$$\begin{aligned} EV(\alpha) &= \frac{1}{2} \left(\frac{b_2 + a_2 + b_1 + a_1}{4} + \frac{b_3 + a_3 + b_4 + a_4}{4} \right) \\ &= \frac{1}{8} (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + b_1 + b_2 + b_3 + b_4). \end{aligned}$$

证毕。 □

对于两个参数型直觉梯形模糊数 α 和 β , 如果 $EV(\alpha) \geq EV(\beta)$, 则 $\alpha \geq \beta$ 。

对于两个模糊集或模糊数之间的相似度有很多确定方法, 在2.2节我们已经介绍了两个矢量之间的J-相似度、E-相似度和C-相似度, 这里不再一一赘述。

7.2.2 参数型直觉梯形模糊数偏好多属性决策方法

设某一决策问题有 p 个决策方案构成决策方案集 $A = \{A_1, A_2, \dots, A_p\}$, 决策专家从 n 个属性 ($C = \{C_1, C_2, \dots, C_n\}$) 对上述 p 个方案进行评价, 第 i 个决策方案的第 j 个决策属性的参数型直觉梯形模糊数评价值为:

$$v_j^i = \langle (a_{j_1}^i, a_{j_2}^i, a_{j_3}^i, a_{j_4}^i), (b_{j_1}^i, b_{j_2}^i, b_{j_3}^i, b_{j_4}^i) \rangle. \quad (7-20)$$

则称 $V^i = (v_1^i, v_2^i, \dots, v_n^i)$ 为决策方案集 A 中第 i 个决策方案的参数型直觉梯形模糊偏好矢量, 由 (7-17) 式计算得其期望偏好矢量为 $E^i = (e_1^i, e_2^i, \dots, e_n^i)$ 。

由于参数型直觉梯形模糊数的期望值可以准确刻画直觉梯形模糊信息, 那么决策方案集 A 中两个决策方案的相似性由两个决策方案的期望偏好矢量之间的相似度定义, 若两个决策方案的期望偏好矢量间相似度越大, 说明两个决策方案相似。由于传统的两个矢量之间的相似度存在决策结果不一致的缺陷, 这会使决策者陷于困境, 无法选出最优方案, 因此在传统的两个矢量之间的相似度基础上改进, 定义新的相似度如下:

定义7.6 设 $E^1 = (e_1^1, e_2^1, \dots, e_n^1)$ 和 $E^2 = (e_1^2, e_2^2, \dots, e_n^2)$ 是两个决策方案的期望偏好矢量, 那么两个期望偏好矢量 E^1 和 E^2 之间的相似度定义如下:

$$\begin{aligned} S^{12} = S(E^1, E^2) &= \frac{1}{2} \frac{2E^1 E^2}{\|E^1\|_2 + \|E^2\|_2} + \frac{1}{2} \frac{2E^1 E^2}{\|E^1\|_2 \|E^2\|_2} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\sum_{i=1}^n e_i^1 e_i^2}{\sum_{i=1}^n (e_i^1)^2 + \sum_{i=1}^n (e_i^2)^2} + \frac{1}{2} \frac{\sum_{i=1}^n e_i^1 e_i^2}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (e_i^1)^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (e_i^2)^2}} \end{aligned} \quad (7-21)$$

定理 7.3. $S(E^1, E^2)$ 满足定义 3.1 中的性质, 是两个期望偏好矢量 E^1 和 E^2 之间的相似度。

证明. 显然, $S(E^1, E^2)$ 满足定义3.1中的(P2-P3)条件, 下证 $S(E^1, E^2)$ 满足(P1).

(P1) $S(E^1, E^2) \geq 0$ 显然成立, 因此, 只需证明 $S(E^1, E^2) \leq 1$. 因为,

$$(e_i^1)^2 + (e_i^2)^2 \geq 2e_i^1 e_i^2, \sqrt{\sum_{i=1}^n (e_i^1)^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (e_i^2)^2} \geq \sum_{i=1}^n e_i^1 e_i^2.$$

代入 (7-21) 式得:

$$\begin{aligned} S(E^1, E^2) &= \frac{1}{2} \frac{\sum_{i=1}^n e_i^1 e_i^2}{\sum_{i=1}^n (e_i^1)^2 + \sum_{i=1}^n (e_i^2)^2} + \frac{1}{2} \frac{\sum_{i=1}^n e_i^1 e_i^2}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (e_i^1)^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (e_i^2)^2}} \\ &\leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \leq 1. \end{aligned}$$

所以, $0 \leq S(E^1, E^2) \leq 1$.

证毕. □

设决策方案集A中的正理想方案的期望偏好矢量为 $E^P = (e_1^P, e_2^P, \dots, e_n^P)$, 负理想方案的期望偏好矢量为 $E^N = (e_1^N, e_2^N, \dots, e_n^N)$. 决策方案集A中第*i*个方案的期望偏好矢量与正理想方案的期望偏好矢量之间的相似度为 S^{Pi} , 与负理想方案期望偏好矢量之间的相似度为 S^{Ni} , 定义相对相似度为

$$RS^i = \frac{S^{Pi}}{S^{Ni}} \tag{7-22}$$

由决策结果最大化原则, 得最优方案为:

$$k = \max_{1 \leq i \leq m} \{RS^i\}. \tag{7-23}$$

即: 若相对相似度越大, 说明该方案与正理想方案相似性大, 该方案与正理想方案差异最小, 即为最优方案。

7.2.3 案例分析

某国外快餐连锁公司要在中国地区投建一个新的子公司, 通过实地考察, 公司为决策者提供了九个方案并从中选出最适合的城市, 方案集为 $A = \{(A_1, \text{北京地区}); (A_2, \text{上海地区}); (A_3, \text{青岛地区}); (A_4, \text{大连地区}); (A_5, \text{香港地区}); (A_6, \text{天津地区}); (A_7, \text{重庆地区}); (A_8, \text{广州地区}); (A_9, \text{南京地区})\}$. 该决策问题的四个决策属性为 $C = \{(C_1, \text{地价}); (C_2, \text{居民人均消费水平}); (C_3, \text{当地基础设施建设}); (C_4, \text{当地物价水平})\}$. 语言值与参数型直觉梯形模糊数的对照表见表7-2.

该决策问题的决策步骤可概括如下:

表 7-2 语言值与参数型直觉梯形模糊数对照表

标度	语言变量	参数型直觉梯形模糊数
1	绝对差	$\langle (0.0, 0.0, 0.0, 0.0), (0.0, 0.0, 0.0, 0.0) \rangle$
2	非常差	$\langle (0.0, 0.0, 0.1, 0.2), (0.0, 0.0, 0.1, 0.2) \rangle$
3	极差	$\langle (0.0, 0.1, 0.2, 0.3), (0.0, 0.1, 0.2, 0.3) \rangle$
4	差	$\langle (0.1, 0.2, 0.3, 0.4), (0.0, 0.2, 0.3, 0.5) \rangle$
5	中等	$\langle (0.3, 0.4, 0.5, 0.6), (0.2, 0.4, 0.5, 0.7) \rangle$
6	好	$\langle (0.5, 0.6, 0.7, 0.8), (0.4, 0.6, 0.7, 0.9) \rangle$
7	极好	$\langle (0.7, 0.8, 0.9, 1.0), (0.7, 0.8, 0.9, 1.0) \rangle$
8	非常好	$\langle (0.8, 0.9, 1.0, 1.0), (0.8, 0.9, 1.0, 1.0) \rangle$
9	绝对好	$\langle (1.0, 1.0, 1.0, 1.0), (1.0, 1.0, 1.0, 1.0) \rangle$

表 7-3 决策方案的参数型直觉梯形模糊偏好矢量

A	c_1 c_3	c_2 c_4
1	$\langle (0.0, 0.0, 0.1, 0.2), (0.0, 0.0, 0.1, 0.2) \rangle$ $\langle (0.5, 0.6, 0.7, 0.8), (0.4, 0.6, 0.7, 0.9) \rangle$	$\langle (0.3, 0.4, 0.5, 0.6), (0.2, 0.4, 0.5, 0.7) \rangle$ $\langle (0.8, 0.9, 1.0, 1.0), (0.8, 0.9, 1.0, 1.0) \rangle$
2	$\langle (0.0, 0.1, 0.2, 0.3), (0.0, 0.1, 0.2, 0.3) \rangle$ $\langle (0.3, 0.4, 0.5, 0.6), (0.2, 0.4, 0.5, 0.7) \rangle$	$\langle (0.1, 0.2, 0.3, 0.4), (0.0, 0.2, 0.3, 0.5) \rangle$ $\langle (1.0, 1.0, 1.0, 1.0), (1.0, 1.0, 1.0, 1.0) \rangle$
3	$\langle (0.3, 0.4, 0.5, 0.6), (0.2, 0.4, 0.5, 0.7) \rangle$ $\langle (0.1, 0.2, 0.3, 0.4), (0.0, 0.2, 0.3, 0.5) \rangle$	$\langle (0.3, 0.4, 0.5, 0.6), (0.2, 0.4, 0.5, 0.7) \rangle$ $\langle (0.1, 0.2, 0.3, 0.4), (0.0, 0.2, 0.3, 0.5) \rangle$
4	$\langle (0.3, 0.4, 0.5, 0.6), (0.2, 0.4, 0.5, 0.7) \rangle$ $\langle (0.0, 0.0, 0.1, 0.2), (0.0, 0.0, 0.1, 0.2) \rangle$	$\langle (0.0, 0.1, 0.2, 0.3), (0.0, 0.1, 0.2, 0.3) \rangle$ $\langle (0.5, 0.6, 0.7, 0.8), (0.4, 0.6, 0.7, 0.9) \rangle$
5	$\langle (0.3, 0.4, 0.5, 0.6), (0.2, 0.4, 0.5, 0.7) \rangle$ $\langle (0.1, 0.2, 0.3, 0.4), (0.0, 0.2, 0.3, 0.5) \rangle$	$\langle (0.5, 0.6, 0.7, 0.8), (0.4, 0.6, 0.7, 0.9) \rangle$ $\langle (0.0, 0.0, 0.1, 0.2), (0.0, 0.0, 0.1, 0.2) \rangle$
6	$\langle (0.8, 0.9, 1.0, 1.0), (0.8, 0.9, 1.0, 1.0) \rangle$ $\langle (0.3, 0.4, 0.5, 0.6), (0.2, 0.4, 0.5, 0.7) \rangle$	$\langle (0.0, 0.0, 0.1, 0.2), (0.0, 0.0, 0.1, 0.2) \rangle$ $\langle (0.1, 0.2, 0.3, 0.4), (0.0, 0.2, 0.3, 0.5) \rangle$
7	$\langle (0.7, 0.8, 0.9, 1.0), (0.7, 0.8, 0.9, 1.0) \rangle$ $\langle (0.1, 0.2, 0.3, 0.4), (0.0, 0.2, 0.3, 0.5) \rangle$	$\langle (0.0, 0.1, 0.2, 0.3), (0.0, 0.1, 0.2, 0.3) \rangle$ $\langle (0.8, 0.9, 1.0, 1.0), (0.8, 0.9, 1.0, 1.0) \rangle$
8	$\langle (0.5, 0.6, 0.7, 0.8), (0.4, 0.6, 0.7, 0.9) \rangle$ $\langle (0.3, 0.4, 0.5, 0.6), (0.2, 0.4, 0.5, 0.7) \rangle$	$\langle (0.5, 0.6, 0.7, 0.8), (0.4, 0.6, 0.7, 0.9) \rangle$ $\langle (0.0, 0.0, 0.1, 0.2), (0.0, 0.0, 0.1, 0.2) \rangle$
9	$\langle (0.1, 0.2, 0.3, 0.4), (0.0, 0.2, 0.3, 0.5) \rangle$ $\langle (0.1, 0.2, 0.3, 0.4), (0.0, 0.2, 0.3, 0.5) \rangle$	$\langle (0.0, 0.0, 0.1, 0.2), (0.0, 0.0, 0.1, 0.2) \rangle$ $\langle (0.0, 0.0, 0.0, 0.0), (0.0, 0.0, 0.0, 0.0) \rangle$
P	$\langle (0.0, 0.0, 0.1, 0.2), (0.0, 0.0, 0.1, 0.2) \rangle$ $\langle (0.7, 0.8, 0.9, 1.0), (0.7, 0.8, 0.9, 1.0) \rangle$	$\langle (0.8, 0.9, 1.0, 1.0), (0.8, 0.9, 1.0, 1.0) \rangle$ $\langle (0.0, 0.1, 0.2, 0.3), (0.0, 0.1, 0.2, 0.3) \rangle$
N	$\langle (1.0, 1.0, 1.0, 1.0), (1.0, 1.0, 1.0, 1.0) \rangle$ $\langle (0.1, 0.2, 0.3, 0.4), (0.0, 0.2, 0.3, 0.5) \rangle$	$\langle (0.0, 0.1, 0.2, 0.3), (0.0, 0.1, 0.2, 0.3) \rangle$ $\langle (0.8, 0.9, 1.0, 1.0), (0.8, 0.9, 1.0, 1.0) \rangle$

步骤1 决策者按照表7-2为上述九个方案评价打分，并确定正理想方案和负理想方案，得到九个决策方案及正负理想方案的参数型直觉梯形模糊数的评价矢量如表7-3。

步骤2 由(7-17)式计算可得到每个决策方案的期望矢量为:

$$\begin{aligned} E^1 &= (0.075, 0.450, 0.650, 0.925); E^2 = (0.150, 0.250, 0.450, 1.000); \\ E^3 &= (0.450, 0.450, 0.250, 0.250); E^4 = (0.450, 0.250, 0.075, 0.650); \\ E^5 &= (0.450, 0.650, 0.250, 0.075); E^6 = (0.925, 0.075, 0.450, 0.250); \\ E^7 &= (0.850, 0.150, 0.250, 0.925); E^8 = (0.650, 0.250, 0.450, 0.075); \\ E^9 &= (0.250, 0.075, 0.250, 0.000). \end{aligned}$$

其正理想方案和负理想方案的期望矢量为:

$$E^P = (0.075, 0.925, 0.850, 0.150), E^N = (1.00, 0.150, 0.250, 0.925).$$

步骤3 由(7-21)式计算每个方案与正理想方案和负理想方案的相似度分别为:

$$\begin{aligned} S^{P1} &= 0.5840, S^{P2} = 0.4308, S^{P3} = 0.5547, S^{P4} = 0.3035, \\ S^{P5} &= 0.6114, S^{P6} = 0.3277, S^{P7} = 0.2777, S^{P8} = 0.4797, \\ S^{P9} &= 0.4204; \end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned} S^{N1} &= 0.5639, S^{N2} = 0.6298, S^{N3} = 0.5912, S^{N4} = 0.7263, \\ S^{N5} &= 0.4455, S^{N6} = 0.6937, S^{N7} = 0.8321, S^{N8} = 0.5701, \\ S^{N9} &= 0.4138. \end{aligned}$$

步骤4 由(7-22)式, 计算得到决策方案的相对相似度为:

$$\begin{aligned} RS^1 &= 1.0358, RS^2 = 0.6840, RS^3 = 0.9383, RS^4 = 0.4179, RS^5 = 1.3724, \\ RS^6 &= 0.4724, RS^7 = 0.3337, RS^8 = 0.8414, RS^9 = 1.0161. \end{aligned}$$

那么根据最大化原则可以确定, 最优方案为 A_5 , 即该公司适合在香港地区开一家连锁店。其次为: 北京地区、南京地区、青岛地区、广州地区、上海地区、天津地区、大连地区、重庆地区。

7.2.4 小结

在模糊信息比较方面, 相似度是一种常用的测量工具, 为模糊偏好多属性决策提供了一种有效的方法。由于参数型直觉梯形模糊数参数较多, 传统的方法会带来繁琐的计算。本节用参数型直觉梯形模糊数的期望值表示决策方案的信息, 在原有的矢量间相似度基础上改进, 提出了一种新的相似度模型, 证明它

满足其它相似度所具有的性质,并把它应用到模糊偏好多属性决策问题。用语言值的参数型直觉梯形模糊数来表示决策方案的属性值,计算决策方案与正理想方案、负理想方案的期望矢量,再由相对相似度公式,分别计算出每个方案与正理想方案和负理想方案的相对相似度,通过相对相似度大小对决策方案进行排序,选出最优方案,最后给出一案例,来讨论本节方法的可行性,数值结果进一步验证了本节方法的实用性。

7.3 考虑属性二元关系的参数型直觉梯形模糊偏好多属性大群体决策

在模糊多属性复杂大群体决策中,对决策成员的决策结果进行有效的聚类^[162],是分析以及完成复杂大群体决策的基础^[163],也是模糊多属性大群体决策的有效方法^[164]及有力工具^[165]。传统的模糊环境下属性关联的群决策方法有:属性关联的TOPSIS语言群决策方法^[166]、直觉梯形模糊数的关联变权多属性决策法^[167]。文献^[168]给出了一种基于直觉的梯形模糊数混合熵的多属性群决策方法;文献^[169]针对属性权重信息完全已知的直觉梯形模糊数型多属性决策问题,提出了一种灰色关联分析方法。在给出了直觉梯形模糊数的距离基础上,依据传统的灰色关联分析法的基本思想建立了直觉梯形模糊数多属性决策问题的决策步骤。文献^[35]针对权重信息不完全确定的直觉梯形模糊数型的多准则决策问题,利用权系数的不完全确定信息,建立关于各方案综合直觉梯形模糊数与理想解和负理想解的Hamming距离的优化模型,通过求解优化模型可得到各准则的最优权系数,进而得到各方案与相对理想解的贴程度,再根据贴程度对决策方案进行排序,从中选出最优方案。上述方法没有考虑属性间的关联,参与决策的成员较少,对于复杂大群体决策问题适用性不强。本节从另一个方面,考虑属性间二元关系,用参数型直觉梯形模糊数表示决策者的偏好信息,给出一种大群体聚类方法。该方法通过计算参数型直觉梯形模糊偏好矢量的期望值得到群体成员期望偏好矢量。基于属性间二元关系形成期望矢量的属性关系矩阵并以此为基础构造了两期望矢量的相似度模型。同时,提出了大群体聚类方法。最后通过算例与其他聚类方法比较,数值结果表明该方法的有效性和实用性。

7.3.1 基于属性间二元关系的参数型直觉梯形模糊数的相似度

定义7.7 设参数型直觉梯形模糊数型偏好多属性大群体决策问题存在 n 个属性, p 个决策方案, m 个决策专家构成决策群体 Ω ,群体中第 k 个决策成员关于第 i 个决策方案对第 j 个决策属性的参数型直觉梯形模糊型评价值为: $v_{ij}^k = \langle (a_{ij1}^k, a_{ij2}^k, a_{ij3}^k, a_{ij4}^k), (b_{ij1}^k, b_{ij2}^k, b_{ij3}^k, b_{ij4}^k) \rangle$,且 $b_{ij1}^k \leq a_{ij1}^k \leq b_{ij2}^k \leq b_{ij2}^k \leq a_{ij3}^k \leq b_{ij3}^k \leq a_{ij4}^k \leq b_{ij4}^k$,则称 $V_i^k = (v_{i1}^k, v_{i2}^k, \dots, v_{in}^k)$ 为群体中第 k 个决策专家关于

第 i 个决策方案的参数型直觉梯形模糊偏好矢量, 由(7-17)式计算得第 k 个决策专家于第 i 个决策方案的期望偏好矢量为 $E_i^k = (e_{i1}^k, e_{i2}^k, \dots, e_{in}^k)$ 。

定义7.8 对于群体中第 k 个决策专家关于第 i 个决策方案的参数型直觉梯形模糊偏好矢量 $E_i^k = (e_{i1}^k, e_{i2}^k, \dots, e_{in}^k)$, 设 Q 为 n 元期望偏好矢量 E_i^k 上的属性二元关系, 对任意的 $1 \leq j_1, j_2 \leq n$, 称 $T_i^k(Q)$ 为 k 个决策专家关于第 i 个决策方案基于关系 Q 的期望属性关系矩阵, 其中 $t_{j_1 j_2}^k = 1$, 当且仅当 $(e_{i j_1}^k, e_{i j_2}^k) \in Q$, 否则 $t_{j_1 j_2}^k = 0$ 。显然该关系矩阵 $T_i^k(Q)$ 是0-1矩阵。

定义7.9 设 $E_i^1 = (e_{i1}^1, e_{i2}^1, \dots, e_{in}^1)$ 和 $E_i^2 = (e_{i1}^2, e_{i2}^2, \dots, e_{in}^2)$ 是关于第 i 个决策方案的两个期望偏好矢量, 设 Q 是期望矢量上的属性二元关系, 由定义7.8得到它们的期望属性关系矩阵分别为 $T_i^1(Q)$ 和 $T_i^2(Q)$, 那么两个成员关于第 i 个决策方案的偏好矢量 V_i^1 和 V_i^2 之间的相似度定义如下:

$$S_i^{12}(V_i^1, V_i^2) = \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\|T_i^1 + T_i^2\|_2}{\|T_i^1\|_\infty + \|T_i^2\|_\infty}, \quad (7-24)$$

其中,

$$\|T\|_2 = (\rho(T'T))^{1/2}, \quad \|T_i\|_\infty = \max_{1 \leq j_1 \leq n} \sum_{j=1}^n |t_{ij}|$$

$\rho(T'T)$ 是矩阵 $T'T$ 的谱半径, 即矩阵 $T'T$ 特征值中绝对值最大者。

定理 7.4. $S_i^{12}(V_i^1, V_i^2)$ 满足定义3.1中的性质, 是两个偏好矢量 V_i^1 和 V_i^2 之间的相似度。

定理7.4的证明过程与前面定理3.1的证明过程类似, 这里不再赘述。

7.3.2 参数型直觉梯形模糊偏好大群体聚类方法

决策成员偏好矢量聚类方法主要包括两个主体算法: 决策成员期望偏好矢量形成属性关系矩阵 T_i 的算法和基于二元关系 Q 的相似度模型(7-24)的群体成员期望偏好矢量聚类算法。

决策成员参数型直觉梯形模糊数型偏好矢量 V_i 形成属性关系矩阵 $T = \{T_i\}$ 的过程如下:

步骤1 把群体 Ω 中所有成员的偏好矢量构成一个集合, 仍记为 Ω , 并对其中的偏好矢量标记为 $1 \sim m$, 顺序取每个偏好矢量。

步骤2 初始化偏好矢量顺序号 $i=1$ 。

步骤3 从 Ω 中按顺序选取偏好矢量, 由(7-17)式计算其期望矢量 E^i , 把所有成员的期望偏好矢量构成一集合, 记为 Ψ , 并对其中的期望偏好矢量标记为 $1 \sim m$, 同时设置集合 T , 顺序取每个期望偏好矢量。

步骤4 再初始化期望偏好矢量顺序号 $i = 1$ 。

步骤5 从 Ψ 中按顺序选取期望偏好矢量 E^i 。若 $(e_j^i, e_i^j) \in Q$, 即属性之间满足二元关系 Q , 则 $t_{ji}^i = 1$; 否则 $t_{ji}^i = 0$, 形成属性关系矩阵 T^i , 把属性关系矩阵 T^i 放入集合 T 中, 同时从 Ψ 中删除 E^i 。

步骤6 如果 Ψ 是非空的, 那么从 Ψ 中选取下一个期望偏好矢量 E^i ($i = i + 1$), 这里 $E^i \in \Psi$, 转入步骤5; 如果 Ψ 是空的, 转入步骤7。

步骤7 输出决策成员期望偏好矢量对应的属性关系矩阵集合 $T = \{T^i\}$, 利用7.3.1节讨论的基于二元关系 Q 的相似度模型(7-24), 转入决策成员偏好矢量聚类算法^[88]。

对于偏好矢量 V^i 与 V^j 之间的相似度, 引入一个阈值 γ , 用于区别偏好矢量 V^i 与 V^j 的相似程度, 即表示两个决策成员间的评价意见接近程度。如 $S(V^i, V^j) \geq \gamma$, 说明两个偏好矢量 V^i 和 V^j 之间的相聚度大于或等于 γ 。阈值 γ 也称为群体中决策成员的资格参数, 用以确定一个决策成员是否可以被包含在一个聚集中。基于两个期望偏好矢量相似度模型 $S(V^i, V^j)$, 对所有成员期望偏好矢量集 $\Omega = \{V^i | i = 1, 2, \dots, m\}$, 调用属性关系矩阵集合 $T = \{T^i | i = 1, 2, \dots, m\}$ 执行聚类算法^[88], 形成 K ($1 \leq K \leq m$)个聚集并构成聚集结构, 设 n_l 是属于第 l 个聚集的偏好矢量个数, 那么 $\sum_{l=1}^K n_l = m$, 每一个聚集 C^l 中成员偏好比较接近。

7.3.3 聚类案例分析

本部分给出一组实验数据来验证本小节聚类方法的有效性, 某省要对本省自然灾害风险进行决策, 该问题存在4个属性(评判准则), 简单记为属性1、属性2、属性3、属性4, 现聘请20个决策专家构成决策群体 G , 每个专家成员分别就这4个属性对该问题进行评价, 可得到20个参数型直觉梯形模糊偏好矢量, 记为 $\Omega = \{V_i | i = 1, 2, \dots, 20\}$, 如下表7-4所示。

由(7-17)式计算决策专家的期望偏好矢量, 如下:

$$\begin{aligned}
 E^1 &= (0.3975, 0.3800, 0.5243, 0.5732); & E^2 &= (0.5364, 0.5090, 0.3232, 0.5617); \\
 E^3 &= (0.5357, 0.5236, 0.3815, 0.4907); & E^4 &= (0.4807, 0.6170, 0.5691, 0.6265); \\
 E^5 &= (0.5620, 0.4769, 0.5944, 0.4346); & E^6 &= (0.3673, 0.4469, 0.3959, 0.5792); \\
 E^7 &= (0.6965, 0.4169, 0.4874, 0.6065); & E^8 &= (0.4687, 0.5166, 0.5863, 0.3979); \\
 E^9 &= (0.5426, 0.5009, 0.4187, 0.5696); & E^{10} &= (0.5127, 0.3999, 0.6237, 0.3749); \\
 E^{11} &= (0.4567, 0.5327, 0.4967, 0.6143); & E^{12} &= (0.3030, 0.3938, 0.6512, 0.5177); \\
 E^{13} &= (0.5156, 0.6112, 0.4988, 0.4183); & E^{14} &= (0.6950, 0.5679, 0.5799, 0.4021); \\
 E^{15} &= (0.6709, 0.5610, 0.6421, 0.5079); & E^{16} &= (0.5593, 0.5792, 0.5672, 0.5562); \\
 E^{17} &= (0.4885, 0.4941, 0.4807, 0.2552); & E^{18} &= (0.3537, 0.4247, 0.4193, 0.7412); \\
 E^{19} &= (0.4086, 0.5737, 0.4689, 0.5231); & E^{20} &= (0.5658, 0.4382, 0.5048, 0.5707).
 \end{aligned}$$

表 7-4 20个决策专家的参数型直觉梯形模糊偏好矢量

成员	属性1 属性3	属性2 属性4
M1	$\langle (0.05, 0.38, 0.44, 0.68), (0.00, 0.24, 0.52, 0.85) \rangle$	$\langle (0.08, 0.28, 0.47, 0.59), (0.05, 0.28, 0.55, 0.69) \rangle$
M2	$\langle (0.11, 0.55, 0.62, 0.89), (0.05, 0.39, 0.65, 0.90) \rangle$	$\langle (0.42, 0.49, 0.59, 0.79), (0.33, 0.45, 0.63, 0.87) \rangle$
M3	$\langle (0.23, 0.47, 0.61, 0.80), (0.04, 0.35, 0.79, 0.97) \rangle$	$\langle (0.10, 0.48, 0.69, 0.90), (0.07, 0.11, 0.74, 0.94) \rangle$
M4	$\langle (0.08, 0.25, 0.31, 0.56), (0.06, 0.13, 0.34, 0.82) \rangle$	$\langle (0.22, 0.29, 0.83, 0.92), (0.13, 0.27, 0.84, 0.94) \rangle$
M5	$\langle (0.35, 0.46, 0.52, 0.78), (0.25, 0.44, 0.65, 0.80) \rangle$	$\langle (0.09, 0.43, 0.58, 0.91), (0.06, 0.25, 0.88, 0.95) \rangle$
M6	$\langle (0.13, 0.27, 0.43, 0.57), (0.07, 0.23, 0.44, 0.87) \rangle$	$\langle (0.24, 0.46, 0.50, 0.70), (0.20, 0.28, 0.70, 0.81) \rangle$
M7	$\langle (0.10, 0.40, 0.43, 0.77), (0.09, 0.40, 0.74, 0.88) \rangle$	$\langle (0.18, 0.74, 0.75, 0.85), (0.17, 0.44, 0.85, 0.91) \rangle$
M8	$\langle (0.38, 0.57, 0.69, 0.71), (0.02, 0.46, 0.75, 0.85) \rangle$	$\langle (0.42, 0.60, 0.60, 0.86), (0.29, 0.58, 0.73, 0.89) \rangle$
M9	$\langle (0.21, 0.46, 0.65, 0.89), (0.15, 0.37, 0.78, 0.95) \rangle$	$\langle (0.22, 0.51, 0.51, 0.57), (0.11, 0.49, 0.52, 0.84) \rangle$
M10	$\langle (0.21, 0.48, 0.78, 0.97), (0.12, 0.32, 0.84, 0.98) \rangle$	$\langle (0.22, 0.27, 0.48, 0.66), (0.17, 0.27, 0.52, 0.84) \rangle$
M11	$\langle (0.08, 0.22, 0.43, 0.69), (0.05, 0.11, 0.62, 0.70) \rangle$	$\langle (0.14, 0.41, 0.46, 0.74), (0.06, 0.32, 0.58, 0.83) \rangle$
M12	$\langle (0.03, 0.07, 0.32, 0.88), (0.01, 0.03, 0.82, 0.96) \rangle$	$\langle (0.23, 0.63, 0.75, 0.84), (0.08, 0.29, 0.82, 0.96) \rangle$
M13	$\langle (0.50, 0.67, 0.80, 0.95), (0.23, 0.57, 0.86, 0.97) \rangle$	$\langle (0.13, 0.34, 0.52, 0.57), (0.12, 0.34, 0.57, 0.71) \rangle$
M14	$\langle (0.09, 0.46, 0.60, 0.85), (0.08, 0.28, 0.63, 0.87) \rangle$	$\langle (0.34, 0.59, 0.65, 0.90), (0.19, 0.51, 0.69, 0.93) \rangle$
M15	$\langle (0.21, 0.36, 0.44, 0.79), (0.13, 0.29, 0.60, 0.88) \rangle$	$\langle (0.39, 0.44, 0.54, 0.75), (0.03, 0.47, 0.73, 0.70) \rangle$
M16	$\langle (0.44, 0.52, 0.55, 0.78), (0.16, 0.51, 0.72, 0.98) \rangle$	$\langle (0.14, 0.40, 0.42, 0.64), (0.00, 0.27, 0.46, 0.85) \rangle$
M17	$\langle (0.26, 0.58, 0.61, 0.81), (0.10, 0.27, 0.77, 0.89) \rangle$	$\langle (0.26, 0.45, 0.48, 0.75), (0.18, 0.42, 0.67, 0.74) \rangle$
M18	$\langle (0.09, 0.42, 0.44, 0.89), (0.01, 0.12, 0.45, 0.90) \rangle$	$\langle (0.05, 0.62, 0.72, 0.84), (0.02, 0.55, 0.82, 0.90) \rangle$
M19	$\langle (0.23, 0.49, 0.58, 0.74), (0.19, 0.40, 0.63, 0.80) \rangle$	$\langle (0.17, 0.27, 0.30, 0.70), (0.01, 0.26, 0.52, 0.93) \rangle$
M20	$\langle (0.33, 0.68, 0.72, 0.87), (0.25, 0.48, 0.72, 0.89) \rangle$	$\langle (0.13, 0.33, 0.51, 0.53), (0.05, 0.28, 0.53, 0.60) \rangle$
M21	$\langle (0.17, 0.25, 0.54, 0.79), (0.12, 0.21, 0.58, 0.95) \rangle$	$\langle (0.26, 0.43, 0.45, 0.91), (0.19, 0.39, 0.60, 0.98) \rangle$
M22	$\langle (0.15, 0.25, 0.69, 0.76), (0.14, 0.24, 0.75, 0.95) \rangle$	$\langle (0.23, 0.58, 0.79, 0.88), (0.20, 0.42, 0.85, 0.92) \rangle$
M23	$\langle (0.06, 0.07, 0.38, 0.66), (0.01, 0.06, 0.45, 0.70) \rangle$	$\langle (0.18, 0.33, 0.37, 0.60), (0.08, 0.29, 0.44, 0.82) \rangle$
M24	$\langle (0.43, 0.72, 0.73, 0.95), (0.05, 0.59, 0.73, 0.97) \rangle$	$\langle (0.17, 0.33, 0.69, 0.92), (0.09, 0.20, 0.74, 0.97) \rangle$
M25	$\langle (0.19, 0.50, 0.63, 0.77), (0.03, 0.49, 0.64, 0.83) \rangle$	$\langle (0.37, 0.61, 0.65, 0.86), (0.19, 0.50, 0.79, 0.88) \rangle$
M26	$\langle (0.26, 0.42, 0.42, 0.82), (0.24, 0.40, 0.50, 0.80) \rangle$	$\langle (0.16, 0.53, 0.55, 0.63), (0.00, 0.17, 0.61, 0.65) \rangle$
M27	$\langle (0.28, 0.79, 0.81, 0.94), (0.12, 0.75, 0.85, 0.98) \rangle$	$\langle (0.23, 0.55, 0.67, 0.87), (0.14, 0.36, 0.71, 0.97) \rangle$
M28	$\langle (0.04, 0.60, 0.67, 0.93), (0.03, 0.52, 0.87, 0.94) \rangle$	$\langle (0.09, 0.29, 0.32, 0.72), (0.01, 0.11, 0.68, 0.95) \rangle$
M29	$\langle (0.48, 0.70, 0.73, 0.82), (0.35, 0.51, 0.77, 0.97) \rangle$	$\langle (0.38, 0.59, 0.60, 0.63), (0.36, 0.43, 0.62, 0.83) \rangle$
M30	$\langle (0.37, 0.56, 0.58, 0.92), (0.30, 0.53, 0.88, 0.94) \rangle$	$\langle (0.12, 0.49, 0.65, 0.88), (0.05, 0.19, 0.66, 0.97) \rangle$
M31	$\langle (0.27, 0.39, 0.64, 0.84), (0.26, 0.39, 0.72, 0.91) \rangle$	$\langle (0.13, 0.44, 0.65, 0.98), (0.09, 0.43, 0.89, 0.99) \rangle$
M32	$\langle (0.15, 0.40, 0.77, 0.91), (0.13, 0.33, 0.87, 0.93) \rangle$	$\langle (0.32, 0.50, 0.65, 0.81), (0.01, 0.47, 0.75, 0.89) \rangle$
M33	$\langle (0.24, 0.31, 0.49, 0.90), (0.00, 0.29, 0.68, 0.97) \rangle$	$\langle (0.17, 0.41, 0.61, 0.89), (0.00, 0.19, 0.65, 0.99) \rangle$
M34	$\langle (0.11, 0.38, 0.58, 0.85), (0.08, 0.24, 0.65, 0.92) \rangle$	$\langle (0.08, 0.21, 0.26, 0.31), (0.06, 0.10, 0.29, 0.69) \rangle$
M35	$\langle (0.02, 0.38, 0.31, 0.58), (0.02, 0.03, 0.40, 0.97) \rangle$	$\langle (0.03, 0.42, 0.52, 0.63), (0.02, 0.42, 0.61, 0.70) \rangle$
M36	$\langle (0.14, 0.34, 0.47, 0.65), (0.03, 0.31, 0.56, 0.83) \rangle$	$\langle (0.54, 0.82, 0.83, 0.87), (0.33, 0.69, 0.86, 0.96) \rangle$
M37	$\langle (0.05, 0.09, 0.34, 0.92), (0.04, 0.08, 0.74, 0.97) \rangle$	$\langle (0.40, 0.54, 0.55, 0.81), (0.29, 0.46, 0.66, 0.84) \rangle$
M38	$\langle (0.24, 0.33, 0.52, 0.84), (0.03, 0.29, 0.52, 0.94) \rangle$	$\langle (0.30, 0.40, 0.58, 0.75), (0.25, 0.32, 0.69, 0.85) \rangle$
M39	$\langle (0.21, 0.46, 0.70, 0.93), (0.10, 0.34, 0.80, 0.90) \rangle$	$\langle (0.13, 0.54, 0.54, 0.60), (0.04, 0.21, 0.59, 0.82) \rangle$
M40	$\langle (0.05, 0.50, 0.67, 0.78), (0.03, 0.28, 0.70, 0.99) \rangle$	$\langle (0.15, 0.55, 0.69, 0.85), (0.02, 0.52, 0.79, 0.95) \rangle$

在实际决策问题中，对于属性间的二元关系，可以通过分析以往的历史数据，用概率分布函数求得，也可以由决策者根据实际决策目标、专家意见来制定，本节给出一组实验数据，为了便于说明问题，本节的二元关系是模拟的。

下面，讨论两种不同的二元关系 Q 对聚类结果的影响。

(1) 对于决策属性之间的二元关系 Q_1 ，用数学语言描述为： $(x_1 + x_2) \geq 1.2$, $(x_1, x_2) \in Q_1$ ，即决策属性间二元关系是专家对两个决策属性的评价之和不小于1.2。按照上述给出的二元关系，按照本小节属性关系矩阵形成算法，可得到20个专家的属性关系矩阵，把20个专家属性矩阵集合记为 $T =$

$\{T^1, T^2, \dots, T^{20}\}$ 。例如专家1、专家2和专家4的属性关系矩阵为：

$$T^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, T^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

和

$$T^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

取聚类阈值 $\gamma = 0.75$ ，对所有成员期望偏好矢量集 $\Omega = \{V^i | i = 1, 2, \dots, m\}$ ，调用属性关系矩阵集合 $T = \{T^i | i = 1, 2, \dots, m\}$ 执行聚类算法^[88]，可得聚集数 $K = 4$ ，算法执行结果如表7-5所示。

表 7-5 基于二元关系 Q_1 ， $\gamma = 0.75$ 时的聚类算法执行结果

聚集	成员数	成员
聚集 C^1	13	$E^1, E^4, E^5, E^6, E^7, E^8, E^9, E^{11}, E^{16}, E^{17}, E^{18}, E^{19}, E^{20}$
聚集 C_2	4	$E^2, E^{10}, E^{12}, E^{15}$
聚集 C_3	2	E^3, E^{13}
聚集 C_4	1	E^{14}

如：由(7-24)式可得专家1和专家2的期望偏好矢量相似度 $S(V^1, V^2) = 0 < 0.75$ ，专家2被放入临时集合，而专家1和专家4的期望偏好矢量相似度 $S(V^1, V^2) = 1 > 0.75$ ，这说明专家1和专家4意见相似，分到集合 C^1 。

(2) 对于决策属性之间的二元关系 Q_2 用数学语言描述为： $\log(x_1 + x_2) \geq 0.1, (x_1, x_2) \in Q_2$ ，即决策属性的二元关系是专家对两个决策属性的评价之和的对数不小于0.1。取阈值 $\gamma = 0.75$ ，算法执行结果如表7-6所示，聚集数 $K=7$ 。

由不同的二元关系 Q ，取相同的阈值，可以得到不同的聚集结构，决策者可以根据决策问题的实际需要，选取合适的聚集结构。换句话说，决策者在聚类过程中，可通过调整二元关系 Q ，阈值大小，找到满足实际要求的聚类结构，解决复杂大群体决策问题，选取最优决策方案。

本小节的方法适用于复杂大群体聚类，为了便于与其他的聚类方法比较，引入一致性指标和离散度。文献^[88]是基于属性之间是独立的，为了便于比较，取聚类阈值 $\gamma = 0.75$ 和 $\gamma = 0.9$ ，利用表7-4的数据，采用文献^[88]的方法和本小节的方法，执行聚类算法，算法执行结果如表7-7所示。

表 7-6 基于二元关系 Q_2 , $\gamma = 0.75$ 时的聚类算法执行结果

聚集	成员数	成员
聚集 C_1	10	$E^1, E^2, E^3, E^6, E^9, E^{16}, E^{17}, E^{18}, E^{19}, E^{20}$
聚集 C_2	2	E^4, E^{15}
聚集 C_3	4	E^5, E^8, E^{10}, E^{13}
聚集 C_4	1	E^7
聚集 C_5	1	E^{11}
聚集 C_6	1	E^{12}
聚集 C_7	1	E^{13}

表 7-7 不同方法的聚类结果比较

方法	阈值	一致性指标	离散度
文献 ^[88]	$\gamma = 0.75$	$\rho = 0.690$	$\delta = 0.310$
文献 ^[88]	$\gamma = 0.75$	$\rho = 0.687$	$\delta = 0.313$
本节方法	$\gamma = 0.9$	$\rho = 0.840$	$\delta = 0.160$
本节方法	$\gamma = 0.9$	$\rho = 0.750$	$\delta = 0.250$

从表7-7中, 很容易看出本小节的方法在取不同阈值时, 一致性指标高于文献^[88], 这说明本节方法考虑了决策属性之间二元的关系, 使得群体意见相对集中, 聚类是合理的。

7.3.4 基于属性二元关系的参数型直觉梯形模糊偏好大群体决策方法

设某一决策问题有 p 个决策方案构成决策方案集 $A = \{A_1, A_2, \dots, A_p\}$, 决策专家从 n 个属性($C = \{C_1, C_2, \dots, C_n\}$)对上述 p 个方案进行评价, 决策者邀请 m 个专家对该决策问题进行评价, m 个专家构成集合 $G = \{G_1, G_2, \dots, G_m\}$ 。专家根据直觉模糊数语言值对上述方案从 n 个属性进行评价, 则第 k 个专家 G_k 对第 i 个方案 A_i 的参数型直觉梯形模糊数型的偏好矢量为:

$$v_i^k = \{ \langle C_1, (a_{i11}^k, a_{i12}^k, a_{i13}^k, a_{i14}^k), (b_{i11}^k, b_{i12}^k, b_{i13}^k, b_{i14}^k) \rangle, \langle C_2, (a_{i21}^k, a_{i22}^k, a_{i23}^k, a_{i24}^k), (b_{i21}^k, b_{i22}^k, b_{i23}^k, b_{i24}^k) \rangle, \dots, \langle C_n, (a_{in1}^k, a_{in2}^k, a_{in3}^k, a_{in4}^k), (b_{in1}^k, b_{in2}^k, b_{in3}^k, a_{in4}^k) \rangle \},$$

这里, $i = 1, 2, \dots, p, k = 1, 2, \dots, m$, 参数型直觉梯形模糊数 $\langle C_j, (a_{ij1}^k, a_{ij2}^k, a_{ij3}^k), a_{ij4}^k, (b_{ij1}^k, b_{ij2}^k, b_{ij3}^k, b_{ij4}^k) \rangle$ 表示方案 A_i 满足 C_j 的隶属度和非隶属度。由(7-17)式计算得其期望偏好矢量为 $E^i = (e_1^i, e_2^i, \dots, e_n^i)$ 。

对于不同的属性 C_j ($j = 1, 2, \dots, n$), 其属性权重值是用参数型直觉梯形模糊数表示的, 由决策者给出, 那么属性的 C_j 的属性权重值记为: $w_j = \langle (a_{j1}, a_{j2}, a_{j3}, a_{j4}), b_{j1}, b_{j2}, b_{j3}, b_{j4} \rangle$ ($j = 1, 2, \dots, n$)。属性权重值 w_j ($j = 1, 2, \dots, n$)的期望权重值, 可由公式(7-17)计算得到。

那么把(7-17)式得到 $w_j (j = 1, 2, \dots, n)$ 的期望权重值标准化可得到每个属性的权重值。

$$\bar{w}_j = \frac{EV(w_j)}{\sum_{i=1}^n EV(w_j)}. \quad (7-25)$$

该决策问题的决策步骤可简单概括为：

步骤 1 利用表7-2, m 个决策专家给出各个方案的参数型直觉梯形模糊数型偏好矢量, 并由(7-17)式计算得其期望偏好矢量。

步骤 2 决策者根据实际情况给出属性间的二元关系, 对于方案 A_1 , 根据7.3.2节给出的聚类算法, 得到该决策方案的专家聚类结构。

步骤 3 由(3-7)和(3-8)得到方案 A_1 的各个聚集的期望偏好矢量, 再由(3-9)得到方案 A_1 的群体期望偏好矢量。

步骤 4 取遍方案集 $A = \{A_1, A_2, \dots, A_p\}$ 的各个方案, 由步骤(1-3), 可得到方案集的群体期望偏好矢量矩阵为：

$$T^U = (T_1, T_2, \dots, T_p)' = \begin{pmatrix} t_1^1 & t_1^2 & \dots & t_1^n \\ t_2^1 & t_2^2 & \dots & t_2^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ t_p^1 & t_p^2 & \dots & t_p^n \end{pmatrix}. \quad (7-26)$$

步骤 5 由(7-25)得到每个属性的权重, 记权重矢量为： $\bar{W} = (\bar{w}_1, \bar{w}_2, \dots, \bar{w}_n)$ 。

步骤 6 各个方案 $A = \{A_1, A_2, \dots, A_p\}$ 的排列顺序, 可由下列等式得到：

$$O = WT^{U'} = (\bar{w}_1, \bar{w}_2, \dots, \bar{w}_n) \begin{pmatrix} t_1^1 & t_1^2 & \dots & t_1^n \\ t_2^1 & t_2^2 & \dots & t_2^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ t_p^1 & t_p^2 & \dots & t_p^n \end{pmatrix} = (O_1, O_2, \dots, O_p). \quad (7-27)$$

根据最大决策原则。则最优方案为：

$$Best\ alternative = \max_{1 \leq i \leq p} \{O_i\}. \quad (7-28)$$

7.3.5 案例分析

在这一小节, 用一实例来讨论前面的考虑属性二元关系的参数型直觉梯形模糊数型大群体决策方法, 设某应急管理部门为某化工厂提供了3个应对火灾的预案 $\{A_1, A_2, A_3\}$ 。该厂邀请各相关部门的12个专家组成专家组, 对上述三个方案, 从下面四个属性进行评判: (1)处置的时间(C_1); (2)消耗的费用(C_2); (3)实

施可行性 (C_3);(4)救援的负面影响 (C_4)。12个专家对上述三个方案进行排序,该决策问题的决策步骤如下:

步骤 1 利用表7-2, 12个决策专家给出三个方案的参数型直觉梯形模糊数型偏好矢量表分别为: 表7-8、表7-9、表7-10。

表 7-8 12个决策专家关于方案 A_1 的参数型直觉梯形模糊偏好矢量

方案	成员	属性1 属性3	属性2 属性4
A_1	1	$\langle (0.0, 0.0, 0.1, 0.2), (0.0, 0.0, 0.1, 0.2) \rangle$	$\langle (0.3, 0.4, 0.5, 0.6), (0.2, 0.4, 0.5, 0.7) \rangle$
		$\langle (0.5, 0.6, 0.7, 0.8), (0.4, 0.6, 0.7, 0.9) \rangle$	$\langle (0.8, 0.9, 1.0, 1.0), (0.8, 0.9, 1.0, 1.0) \rangle$
	2	$\langle (0.0, 0.1, 0.2, 0.3), (0.0, 0.1, 0.2, 0.3) \rangle$	$\langle (0.1, 0.2, 0.3, 0.4), (0.0, 0.2, 0.3, 0.5) \rangle$
		$\langle (0.3, 0.4, 0.5, 0.6), (0.2, 0.4, 0.5, 0.7) \rangle$	$\langle (1.0, 1.0, 1.0, 1.0), (1.0, 1.0, 1.0, 1.0) \rangle$
	3	$\langle (0.3, 0.4, 0.5, 0.6), (0.2, 0.4, 0.5, 0.7) \rangle$	$\langle (0.3, 0.4, 0.5, 0.6), (0.2, 0.4, 0.5, 0.7) \rangle$
		$\langle (0.1, 0.2, 0.3, 0.4), (0.0, 0.2, 0.3, 0.5) \rangle$	$\langle (0.1, 0.2, 0.3, 0.4), (0.0, 0.2, 0.3, 0.5) \rangle$
	4	$\langle (0.3, 0.4, 0.5, 0.6), (0.2, 0.4, 0.5, 0.7) \rangle$	$\langle (0.0, 0.1, 0.2, 0.3), (0.0, 0.1, 0.2, 0.3) \rangle$
		$\langle (0.0, 0.0, 0.1, 0.2), (0.0, 0.0, 0.1, 0.2) \rangle$	$\langle (0.5, 0.6, 0.7, 0.8), (0.4, 0.6, 0.7, 0.9) \rangle$
	5	$\langle (0.3, 0.4, 0.5, 0.6), (0.2, 0.4, 0.5, 0.7) \rangle$	$\langle (0.5, 0.6, 0.7, 0.8), (0.4, 0.6, 0.7, 0.9) \rangle$
		$\langle (0.1, 0.2, 0.3, 0.4), (0.0, 0.2, 0.3, 0.5) \rangle$	$\langle (0.0, 0.0, 0.1, 0.2), (0.0, 0.0, 0.1, 0.2) \rangle$
	6	$\langle (0.8, 0.9, 1.0, 1.0), (0.8, 0.9, 1.0, 1.0) \rangle$	$\langle (0.0, 0.0, 0.1, 0.2), (0.0, 0.0, 0.1, 0.2) \rangle$
		$\langle (0.3, 0.4, 0.5, 0.6), (0.2, 0.4, 0.5, 0.7) \rangle$	$\langle (0.1, 0.2, 0.3, 0.4), (0.0, 0.2, 0.3, 0.5) \rangle$
7	$\langle (0.7, 0.8, 0.9, 1.0), (0.7, 0.8, 0.9, 1.0) \rangle$	$\langle (0.0, 0.1, 0.2, 0.3), (0.0, 0.1, 0.2, 0.3) \rangle$	
	$\langle (0.1, 0.2, 0.3, 0.4), (0.0, 0.2, 0.3, 0.5) \rangle$	$\langle (0.8, 0.9, 1.0, 1.0), (0.8, 0.9, 1.0, 1.0) \rangle$	
8	$\langle (0.5, 0.6, 0.7, 0.8), (0.4, 0.6, 0.7, 0.9) \rangle$	$\langle (0.5, 0.6, 0.7, 0.8), (0.4, 0.6, 0.7, 0.9) \rangle$	
	$\langle (0.3, 0.4, 0.5, 0.6), (0.2, 0.4, 0.5, 0.7) \rangle$	$\langle (0.0, 0.0, 0.1, 0.2), (0.0, 0.0, 0.1, 0.2) \rangle$	
9	$\langle (0.1, 0.2, 0.3, 0.4), (0.0, 0.2, 0.3, 0.5) \rangle$	$\langle (0.0, 0.0, 0.1, 0.2), (0.0, 0.0, 0.1, 0.2) \rangle$	
	$\langle (0.1, 0.2, 0.3, 0.4), (0.0, 0.2, 0.3, 0.5) \rangle$	$\langle (0.0, 0.0, 0.0, 0.0), (0.0, 0.0, 0.0, 0.0) \rangle$	
10	$\langle (0.5, 0.6, 0.7, 0.8), (0.4, 0.6, 0.7, 0.9) \rangle$	$\langle (0.1, 0.2, 0.3, 0.4), (0.0, 0.2, 0.3, 0.5) \rangle$	
	$\langle (0.5, 0.6, 0.7, 0.8), (0.4, 0.6, 0.7, 0.9) \rangle$	$\langle (0.7, 0.8, 0.9, 1.0), (0.7, 0.8, 0.9, 1.0) \rangle$	
11	$\langle (0.3, 0.4, 0.5, 0.6), (0.2, 0.4, 0.5, 0.7) \rangle$	$\langle (0.5, 0.6, 0.7, 0.8), (0.4, 0.6, 0.7, 0.9) \rangle$	
	$\langle (0.0, 0.1, 0.2, 0.3), (0.0, 0.1, 0.2, 0.3) \rangle$	$\langle (0.3, 0.4, 0.5, 0.6), (0.2, 0.4, 0.5, 0.7) \rangle$	
12	$\langle (0.7, 0.8, 0.9, 1.0), (0.7, 0.8, 0.9, 1.0) \rangle$	$\langle (0.7, 0.8, 0.9, 1.0), (0.7, 0.8, 0.9, 1.0) \rangle$	
	$\langle (0.3, 0.4, 0.5, 0.6), (0.2, 0.4, 0.5, 0.7) \rangle$	$\langle (0.8, 0.9, 1.0, 1.0), (0.8, 0.9, 1.0, 1.0) \rangle$	

表 7-9 12个决策专家关于方案 A_2 的参数型直觉梯形模糊偏好矢量

方案	成员	属性1 属性3	属性2 属性4
A_2	1	$\langle (0.3, 0.4, 0.5, 0.6), (0.2, 0.4, 0.5, 0.7) \rangle$	$\langle (0.5, 0.6, 0.7, 0.8), (0.4, 0.6, 0.7, 0.9) \rangle$
	2	$\langle (0.0, 0.1, 0.2, 0.3), (0.0, 0.1, 0.2, 0.3) \rangle$	$\langle (0.3, 0.4, 0.5, 0.6), (0.2, 0.4, 0.5, 0.7) \rangle$
	3	$\langle (0.7, 0.8, 0.9, 1.0), (0.7, 0.8, 0.9, 1.0) \rangle$	$\langle (0.5, 0.6, 0.7, 0.8), (0.4, 0.6, 0.7, 0.9) \rangle$
	4	$\langle (0.5, 0.6, 0.7, 0.8), (0.4, 0.6, 0.7, 0.9) \rangle$	$\langle (0.7, 0.8, 0.9, 1.0), (0.7, 0.8, 0.9, 1.0) \rangle$
	5	$\langle (0.5, 0.6, 0.7, 0.8), (0.4, 0.6, 0.7, 0.9) \rangle$	$\langle (0.7, 0.8, 0.9, 1.0), (0.7, 0.8, 0.9, 1.0) \rangle$
	6	$\langle (0.7, 0.8, 0.9, 1.0), (0.7, 0.8, 0.9, 1.0) \rangle$	$\langle (0.5, 0.6, 0.7, 0.8), (0.4, 0.6, 0.7, 0.9) \rangle$
	7	$\langle (0.0, 0.1, 0.2, 0.3), (0.0, 0.1, 0.2, 0.3) \rangle$	$\langle (0.7, 0.8, 0.9, 1.0), (0.7, 0.8, 0.9, 1.0) \rangle$
	8	$\langle (0.5, 0.6, 0.7, 0.8), (0.4, 0.6, 0.7, 0.9) \rangle$	$\langle (0.1, 0.2, 0.3, 0.4), (0.0, 0.2, 0.3, 0.5) \rangle$
	9	$\langle (0.7, 0.8, 0.9, 1.0), (0.7, 0.8, 0.9, 1.0) \rangle$	$\langle (0.5, 0.6, 0.7, 0.8), (0.4, 0.6, 0.7, 0.9) \rangle$
	10	$\langle (0.5, 0.6, 0.7, 0.8), (0.4, 0.6, 0.7, 0.9) \rangle$	$\langle (0.3, 0.4, 0.5, 0.6), (0.2, 0.4, 0.5, 0.7) \rangle$
	11	$\langle (0.0, 0.1, 0.2, 0.3), (0.0, 0.1, 0.2, 0.3) \rangle$	$\langle (0.1, 0.2, 0.3, 0.4), (0.0, 0.2, 0.3, 0.5) \rangle$
	12	$\langle (0.3, 0.4, 0.5, 0.6), (0.2, 0.4, 0.5, 0.7) \rangle$	$\langle (0.5, 0.6, 0.7, 0.8), (0.4, 0.6, 0.7, 0.9) \rangle$

由 (7-17) 式计算12个决策专家对三个方案的期望偏好矢量，如下：

$$\begin{aligned}
 E_1^1 &= (0.075, 0.450, 0.650, 0.925); & E_1^2 &= (0.150, 0.250, 0.450, 1.000); \\
 E_1^3 &= (0.450, 0.450, 0.250, 0.250); & E_1^4 &= (0.450, 0.250, 0.075, 0.650); \\
 E_1^5 &= (0.450, 0.650, 0.250, 0.075); & E_1^6 &= (0.925, 0.075, 0.450, 0.250); \\
 E_1^7 &= (0.850, 0.150, 0.250, 0.925); & E_1^8 &= (0.650, 0.250, 0.450, 0.075); \\
 E_1^9 &= (0.250, 0.075, 0.250, 0.000); & E_1^{10} &= (0.650, 0.250, 0.650, 0.850); \\
 E_1^{11} &= (0.450, 0.650, 0.150, 0.450); & E_1^{12} &= (0.850, 1.000, 0.450, 0.925); \\
 E_2^1 &= (0.450, 0.650, 0.450, 0.075); & E_2^2 &= (0.150, 0.450, 0.650, 0.925); \\
 E_2^3 &= (0.850, 0.650, 0.250, 0.150); & E_2^4 &= (0.650, 0.850, 0.450, 1.000); \\
 E_2^5 &= (0.650, 0.850, 0.450, 0.850); & E_2^6 &= (0.850, 0.650, 0.450, 0.250); \\
 E_2^7 &= (0.150, 0.850, 0.450, 0.250); & E_2^8 &= (0.650, 0.850, 0.450, 0.650); \\
 E_2^9 &= (0.850, 0.650, 0.450, 0.150); & E_2^{10} &= (0.650, 0.450, 0.650, 0.450);
 \end{aligned}$$

表 7-10 12个决策专家关于方案 A_3 的参数型直觉梯形模糊偏好矢量

方案	成员	属性1 属性3	属性2 属性4
A_3	1	$\langle (0.1, 0.2, 0.3, 0.4), (0.0, 0.2, 0.3, 0.5) \rangle$	$\langle (0.0, 0.1, 0.2, 0.3), (0.0, 0.1, 0.2, 0.3) \rangle$ $\langle (0.7, 0.8, 0.9, 1.0), (0.7, 0.8, 0.9, 1.0) \rangle$
	2	$\langle (0.0, 0.1, 0.2, 0.3), (0.0, 0.1, 0.2, 0.3) \rangle$	$\langle (0.5, 0.6, 0.7, 0.8), (0.4, 0.6, 0.7, 0.9) \rangle$ $\langle (0.1, 0.2, 0.3, 0.4), (0.0, 0.2, 0.3, 0.5) \rangle$
	3	$\langle (0.8, 0.9, 1.0, 1.0), (0.8, 0.9, 1.0, 1.0) \rangle$	$\langle (0.3, 0.4, 0.5, 0.6), (0.2, 0.4, 0.5, 0.7) \rangle$ $\langle (0.5, 0.6, 0.7, 0.8), (0.4, 0.6, 0.7, 0.9) \rangle$
	4	$\langle (0.0, 0.1, 0.2, 0.3), (0.0, 0.1, 0.2, 0.3) \rangle$	$\langle (1.0, 1.0, 1.0, 1.0), (1.0, 1.0, 1.0, 1.0) \rangle$ $\langle (0.5, 0.6, 0.7, 0.8), (0.4, 0.6, 0.7, 0.9) \rangle$
	5	$\langle (0.3, 0.4, 0.5, 0.6), (0.2, 0.4, 0.5, 0.7) \rangle$	$\langle (0.0, 0.0, 0.1, 0.2), (0.0, 0.0, 0.1, 0.2) \rangle$ $\langle (0.1, 0.2, 0.3, 0.4), (0.0, 0.2, 0.3, 0.5) \rangle$
	6	$\langle (0.5, 0.6, 0.7, 0.8), (0.4, 0.6, 0.7, 0.9) \rangle$	$\langle (0.3, 0.4, 0.5, 0.6), (0.2, 0.4, 0.5, 0.7) \rangle$ $\langle (0.1, 0.2, 0.3, 0.4), (0.0, 0.2, 0.3, 0.5) \rangle$
	7	$\langle (0.3, 0.4, 0.5, 0.6), (0.2, 0.4, 0.5, 0.7) \rangle$	$\langle (0.1, 0.2, 0.3, 0.4), (0.0, 0.2, 0.3, 0.5) \rangle$ $\langle (0.5, 0.6, 0.7, 0.8), (0.4, 0.6, 0.7, 0.9) \rangle$
	8	$\langle (0.1, 0.2, 0.3, 0.4), (0.0, 0.2, 0.3, 0.5) \rangle$	$\langle (0.3, 0.4, 0.5, 0.6), (0.2, 0.4, 0.5, 0.7) \rangle$ $\langle (0.1, 0.2, 0.3, 0.4), (0.0, 0.2, 0.3, 0.5) \rangle$
	9	$\langle (0.0, 0.1, 0.2, 0.3), (0.0, 0.1, 0.2, 0.3) \rangle$	$\langle (0.7, 0.8, 0.9, 1.0), (0.7, 0.8, 0.9, 1.0) \rangle$ $\langle (0.5, 0.6, 0.7, 0.8), (0.4, 0.6, 0.7, 0.9) \rangle$
	10	$\langle (0.7, 0.8, 0.9, 1.0), (0.7, 0.8, 0.9, 1.0) \rangle$	$\langle (0.1, 0.2, 0.3, 0.4), (0.0, 0.2, 0.3, 0.5) \rangle$ $\langle (0.1, 0.2, 0.3, 0.4), (0.0, 0.2, 0.3, 0.5) \rangle$
	11	$\langle (0.0, 0.1, 0.2, 0.3), (0.0, 0.1, 0.2, 0.3) \rangle$	$\langle (0.7, 0.8, 0.9, 1.0), (0.7, 0.8, 0.9, 1.0) \rangle$ $\langle (0.5, 0.6, 0.7, 0.8), (0.4, 0.6, 0.7, 0.9) \rangle$
	12	$\langle (0.3, 0.4, 0.5, 0.6), (0.2, 0.4, 0.5, 0.7) \rangle$	$\langle (0.0, 0.0, 0.1, 0.2), (0.0, 0.0, 0.1, 0.2) \rangle$ $\langle (0.5, 0.6, 0.7, 0.8), (0.4, 0.6, 0.7, 0.9) \rangle$

$$\begin{aligned}
 E_2^{11} &= (0.450, 0.650, 0.150, 0.450); E_2^{12} = (0.450, 0.650, 0.450, 0.250); \\
 E_3^1 &= (0.250, 0.150, 0.850, 0.650); E_3^2 = (0.150, 0.650, 0.250, 0.000); \\
 E_3^3 &= (0.925, 0.450, 0.650, 1.000); E_3^4 = (0.150, 0.650, 0.450, 0.075); \\
 E_3^5 &= (0.450, 0.450, 0.250, 0.075); E_3^6 = (0.650, 0.650, 0.450, 0.250); \\
 E_3^7 &= (0.450, 0.250, 0.650, 0.450); E_3^8 = (0.250, 0.250, 0.650, 0.850); \\
 E_3^9 &= (0.150, 0.650, 0.250, 0.250); E_3^{10} = (0.850, 0.850, 0.250, 0.250); \\
 E_3^{11} &= (0.150, 0.650, 0.075, 0.650); E_3^{12} = (0.450, 0.850, 0.450, 0.450).
 \end{aligned}$$

步骤 2-3 设决策属性之间存在二元关系“优于”，那么决策者把二元关系“优于”用数学语言描述为 $\log(x_1 + x_2) \geq 0.4$ 。取阈值 $\delta = 0.75$ ，利用模型(7-24)和7.3.2节给出的聚类算法，可得到三个方案的聚类结果如表7-11:

步骤 4 利用表7-11的最后一列得到，群体期望矢量矩阵为:

表 7-11 当 $\delta = 0.75$, 各个方案的聚类结果

方案	聚集的成员个数	成员r	聚集的期望矢量	群体的期望矢量
A_1	8	1, 2, 3, 4, 5, 8, 9, 11	(0.4888, 0.5055, 0.4219, 0.5723)	(0.5429, 0.4348,
	3	3, 6, 7, 12	(0.6985, 0.3260, 0.3060, 0.5588)	0.4002, 0.5767)
	1	10	(0.5091, 0.1958, 0.5091, 0.6658)	
A_2	5	1, 2, 10, 11, 12	(0.3742, 0.4956, 0.5765, 0.5310)	(0.4805, 0.5799,
	7	3, 4, 5, 6, 7, 8, 9	(0.5564, 0.6402, 0.3530, 0.3949)	0.4461, 0.4516)
A_3	1	1	(0.2254, 0.1353, 0.7664, 0.5861)	
	8	2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11	(0.3828, 0.6699, 0.4825, 0.4147)	(0.4148, 0.6018,
	1	3	(0.5873, 0.2857, 0.4127, 0.6349)	0.4694, 0.4277)
	2	10, 12	(0.5513, 0.7210, 0.2969, 0.2969)	

$$T^U = \begin{pmatrix} 0.5429 & 0.4805 & 0.4148 \\ 0.4348 & 0.5799 & 0.6018 \\ 0.4002 & 0.4461 & 0.4694 \\ 0.5767 & 0.4516 & 0.4277 \end{pmatrix}.$$

步骤 5 决策者给出四个决策属性 C_i 的参数型直觉梯形模糊数型偏好矢量为:

$$\begin{aligned} w_1 &= \langle C_1, (0.3, 0.4, 0.5, 0.6), (0.2, 0.4, 0.5, 0.7) \rangle, \\ w_2 &= \langle C_2, (0.7, 0.8, 0.9, 1.0), (0.7, 0.8, 0.9, 1.0) \rangle, \\ w_3 &= \langle C_3, (0.1, 0.2, 0.3, 0.4), (0.0, 0.2, 0.3, 0.5) \rangle, \\ w_4 &= \langle C_4, (0.8, 0.9, 1.0, 1.0), (0.8, 0.9, 1.0, 1.0) \rangle. \end{aligned}$$

由 (7-17) 式计算得到各个属性的期望偏好矢量, 再由 (7-25) 得到每个属性的标准化权重值, 记权重矢量为 $\bar{W} = (0.2430, 0.3178, 0.0935, 0.3458)$.

步骤 6 由 (7-27) 得到三个方案的排序向量为:

$$\begin{aligned} O = \bar{W}T^U &= (0.2430, 0.3178, 0.0935, 0.3458) \begin{pmatrix} 0.5429 & 0.4805 & 0.4148 \\ 0.4348 & 0.5799 & 0.6018 \\ 0.4002 & 0.4461 & 0.4694 \\ 0.5767 & 0.4516 & 0.4277 \end{pmatrix} \\ &= (0.5070, 0.4989, 0.4838). \end{aligned}$$

由排序向量得到三个方案的顺序为: $A_1 \succ A_2 \succ A_3$, 根据决策最大原则, 方案 A_1 为最优方案。

7.3.6 小结

在复杂大群体决策中,对群体成员进行有效聚类是群决策中一项非常有用的技术,可应用于从大量群体决策偏好数据中寻找成员偏好之间的相似性。本节针对复杂大群体多属性决策问题,考虑决策属性间的二元关系,探讨了用参数型直觉梯形模糊数表示决策者的偏好信息的决策方法,通过计算群体成员偏好矢量的期望值,得到其期望矢量,基于属性间二元关系,构建两个期望矢量基于属性二元关系的相似度模型,并证明它满足相似度的性质。以该相似度模型为基础提出了新的聚类方法,用数值例子讨论本节的聚类方法,在给出的实例结果比较中,易看出本节的聚类方法得到的聚集一致性指标高,聚类有效。最后,把该聚类方法应用到多属性大群体决策中,给出一案例,通过加权群体期望矢量大小来排列方案,由最大原则选出最优方案,案例结果表明本节的方法是实用的、有效的。

7.4 区间梯形模糊数型偏好多属性大群体决策方法

区间模糊集的概念最初分别由Gorzalczany^[170]和Turksen^[171]提出,并且给出两个区间模糊集的运算法则及其距离等一些基本性质,在此基础上Wang和Li在文献^[172]拓展得到区间模糊数,以及两个区间模糊数的基本运算法则,在文献^[173]和文献^[174]定义的两个区间模糊数的距离基础上,给出了两个区间模糊数之间的相似度及性质。Balezentis和Zeng在文献^[175]拓展了MULTIMOORA(Multi-Objective Optimization by Ratio Analysis plus the Full Multiplicative From)方法,用于解决区间模糊数型多属性决策问题,从案例结果可以看出该方法比原有的MULTIMOORA方法更有效。文献^[176],给出了一种区间模糊数型权重的确定方法,并把它应用解决多属性群决策问题。在文献^[177],Ashtiani等人把模糊TOPSIS方法应用解决区间三角模糊数型多属性群决策问题,案例结果表明该方法是实用的、有效的。Wei和Chen在文献^[178],考虑决策风险,提出了两个区间梯形模糊数的相似度,并把应用解决区间梯形模糊数型多属性决策问题,其属性权重是已知的。Liu在文献^[38]和文献^[179]分别用加权平均算子和几何平均算子解决区间梯形模糊数型偏好多属性群决策问题,案例结果一致,几何平均算子较加权平均算子收敛快,更易得到决策方案的排序。上述几种方法,没有讨论区间梯形模糊数型大群体决策问题,因此本节给出基于区间梯形模糊数间相似度的多属性大群体决策方法,该方法简洁明了,更适用解决复杂大群体决策问题。

本节给出区间梯形模糊数的定义和区间梯形模糊数的基本运算法则,利用两个区间梯形模糊数之间的距离,构造两个区间梯形模糊数之间的相似度。在上述相似度模型基础上,给出区间梯形模糊数型多属性大群体决策方法,最后把本节的方法应用到实际决策问题中,案例结果表明本节的方法是有效的、可行的。

7.4.1 区间梯形模糊数及相似度

首先介绍梯形模糊数的普遍形式，为了和7.1节的梯形模糊数区别，记本节的梯形模糊数为G-梯形模糊数，其定义如下：

定义7.10 G-梯形模糊数^[180]可记为 $\alpha = (a_1, a_2, a_3, a_4; \omega_\alpha)$ (如图7-3所示)，其隶属函数 $\mu_\alpha(x) : R \rightarrow [0, 1]$ 定义如下：

$$\mu_\alpha(x) = \begin{cases} \frac{x-a_1}{a_2-a_1} \times \omega_\alpha, & x \in (a_1, a_2), \\ \omega_\alpha, & x \in (a_2, a_3), \\ \frac{x-a_4}{a_3-a_4} \times \omega_\alpha, & x \in (a_3, a_4), \\ 0, & x \in (-\infty, a_1) \cup (a_4, +\infty). \end{cases} \quad (7-29)$$

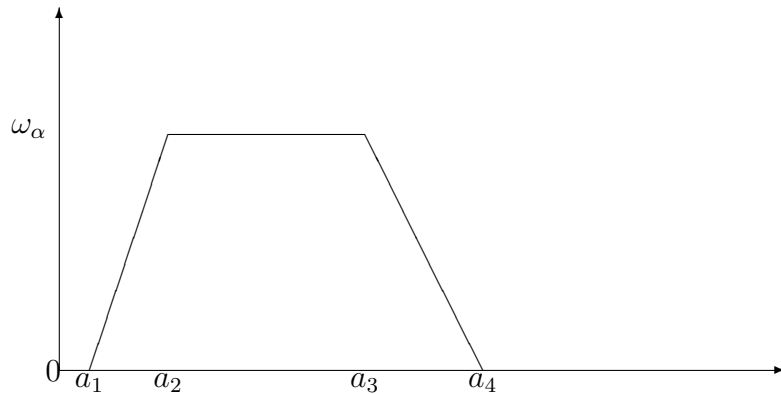


图 7-3 G-梯形模糊数的图像

由于文献^[180]给出的G-梯形模糊数含有的参数较多，这给比较两个G-梯形模糊数的大小带来了困难，Chen和Chen在文献^[181]提出了G-梯形模糊数的中心重心 (Center of gravity) 点。设 $\alpha = (a_1, a_2, a_3, a_4; \omega_\alpha)$ 是一G-梯形模糊数，其中心重心点记为： (X_α, Y_α) ，则

$$\begin{cases} Y_\alpha = \begin{cases} \frac{\omega_\alpha}{6} \times (\frac{a_3-a_2}{a_4-a_1} + 2), & \text{if } a_1 \neq a_4, \\ \frac{\omega_\alpha}{6}, & \text{if } a_1 = a_4 \end{cases} \\ X_\alpha = \frac{Y_\alpha \times (a_2+a_3) + (a_1+a_4) \times (\omega_\alpha - Y_\alpha)}{2 \times \omega_\alpha} \end{cases} \quad (7-30)$$

Wang和Li在文献^[174]给出了区间梯形模糊数的定义，设 $\alpha = [\alpha^L, \alpha^U] = [(a_1^L, a_2^L, a_3^L, a_4^L; \omega_{\alpha^L}), (a_1^U, a_2^U, a_3^U, a_4^U; \omega_{\alpha^U})]$ ，其中 $0 \leq a_1^L \leq a_2^L \leq a_3^L \leq a_4^L \leq 1$ ， $0 \leq a_1^U \leq a_2^U \leq a_3^U \leq a_4^U \leq 1$ ， $0 \leq \omega_{\alpha^L} \leq \omega_{\alpha^U} \leq 1$ ，并且 $\alpha^L \subseteq \alpha^U$ ， α^L 和 α^U 分别为区间梯形模糊数的最大值和最小值，其图像如图7-4所示。

设 $\alpha = [\alpha^L, \alpha^U] = [(a_1^L, a_2^L, a_3^L, a_4^L; \omega_{\alpha^L}), (a_1^U, a_2^U, a_3^U, a_4^U; \omega_{\alpha^U})]$ 和 $\beta = [\beta^L, \beta^U] = [(b_1^L, b_2^L, b_3^L, b_4^L; \omega_{\beta^L}), (b_1^U, b_2^U, b_3^U, b_4^U; \omega_{\beta^U})]$ 是两个区间梯形模糊数，其中 $0 \leq a_1^L \leq a_2^L \leq a_3^L \leq a_4^L \leq 1$ ， $0 \leq a_1^U \leq a_2^U \leq a_3^U \leq a_4^U \leq 1$ ， $0 \leq \omega_{\alpha^L} \leq \omega_{\alpha^U} \leq 1$ ， $0 \leq$

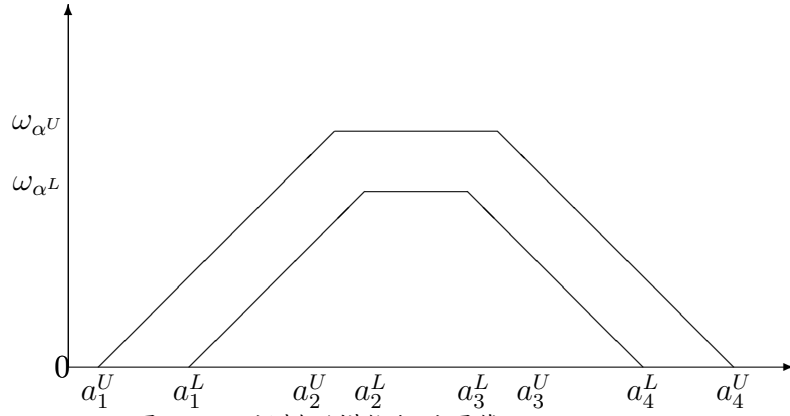


图 7-4 区间梯形模糊数的图像

$b_1^L \leq b_2^L \leq b_3^L \leq b_4^L \leq 1$, $0 \leq b_1^U \leq b_2^U \leq b_3^U \leq b_4^U \leq 1$, $0 \leq \omega_{\beta^L} \leq \omega_{\beta^U} \leq 1$, 并且 $\alpha^L \subseteq \alpha^U$, $\beta^L \subseteq \beta^U$, 那么存在以下运算法则^[178]:

(1) 加法:

$$\begin{aligned} \alpha \oplus \beta &= [(a_1^L, a_2^L, a_3^L, a_4^L; \omega_{\alpha^L}), (a_1^U, a_2^U, a_3^U, a_4^U; \omega_{\alpha^U})] \\ &\quad \oplus [(b_1^L, b_2^L, b_3^L, b_4^L; \omega_{\beta^L}), (b_1^U, b_2^U, b_3^U, b_4^U; \omega_{\beta^U})] \\ &= [(a_1^L + b_1^L, a_2^L + b_2^L, a_3^L + b_3^L, a_4^L + b_4^L; \min(\omega_{\alpha^L}, \omega_{\beta^L}), \\ &\quad (a_1^U + b_1^U, a_2^U + b_2^U, a_3^U + b_3^U, a_4^U + b_4^U; \min(\omega_{\alpha^U}, \omega_{\beta^U}))]; \end{aligned}$$

(2) 减法:

$$\begin{aligned} \alpha \ominus \beta &= [(a_1^L, a_2^L, a_3^L, a_4^L; \omega_{\alpha^L}), (a_1^U, a_2^U, a_3^U, a_4^U; \omega_{\alpha^U})] \\ &\quad \ominus [(b_1^L, b_2^L, b_3^L, b_4^L; \omega_{\beta^L}), (b_1^U, b_2^U, b_3^U, b_4^U; \omega_{\beta^U})] \\ &= [(a_1^L - b_1^L, a_2^L - b_2^L, a_3^L - b_3^L, a_4^L - b_4^L; \min(\omega_{\alpha^L}, \omega_{\beta^L}), \\ &\quad (a_1^U - b_1^U, a_2^U - b_2^U, a_3^U - b_3^U, a_4^U - b_4^U; \min(\omega_{\alpha^U}, \omega_{\beta^U}))]; \end{aligned}$$

(3) 乘法:

$$\begin{aligned} \alpha \otimes \beta &= [(a_1^L, a_2^L, a_3^L, a_4^L; \omega_{\alpha^L}), (a_1^U, a_2^U, a_3^U, a_4^U; \omega_{\alpha^U})] \\ &\quad \otimes [(b_1^L, b_2^L, b_3^L, b_4^L; \omega_{\beta^L}), (b_1^U, b_2^U, b_3^U, b_4^U; \omega_{\beta^U})] \\ &= [(a_1^L \times b_1^L, a_2^L \times b_2^L, a_3^L \times b_3^L, a_4^L \times b_4^L; \min(\omega_{\alpha^L}, \omega_{\beta^L}), \\ &\quad (a_1^U \times b_1^U, a_2^U \times b_2^U, a_3^U \times b_3^U, a_4^U \times b_4^U; \min(\omega_{\alpha^U}, \omega_{\beta^U}))]; \end{aligned}$$

(4) 除法:

$$\begin{aligned} \alpha \oslash \beta &= [(a_1^L, a_2^L, a_3^L, a_4^L; \omega_{\alpha^L}), (a_1^U, a_2^U, a_3^U, a_4^U; \omega_{\alpha^U})] \\ &\quad \oslash [(b_1^L, b_2^L, b_3^L, b_4^L; \omega_{\beta^L}), (b_1^U, b_2^U, b_3^U, b_4^U; \omega_{\beta^U})] \\ &= [(a_1^L/b_1^L, a_2^L/b_2^L, a_3^L/b_3^L, a_4^L/b_4^L; \min(\omega_{\alpha^L}, \omega_{\beta^L}), \\ &\quad (a_1^U/b_1^U, a_2^U/b_2^U, a_3^U/b_3^U, a_4^U/b_4^U; \min(\omega_{\alpha^U}, \omega_{\beta^U}))]; \end{aligned}$$

(5) 数乘法:

$$\lambda\alpha = \lambda \times [(\lambda a_1^L, \lambda a_2^L, \lambda a_3^L, \lambda a_4^L; \omega_{\alpha^L}), (\lambda a_1^U, \lambda a_2^U, \lambda a_3^U, \lambda a_4^U; \omega_{\alpha^U})].$$

Liu在文献^[38]给出了区间梯形模糊数的中心重心点以及两个区间梯形模糊数的比较原则, 设 $\alpha = [\alpha^L, \alpha^U] = [(a_1^L, a_2^L, a_3^L, a_4^L; \omega_{\alpha^L}), (a_1^U, a_2^U, a_3^U, a_4^U; \omega_{\alpha^U})]$ 和 $\beta = [\beta^L, \beta^U] = [(b_1^L, b_2^L, b_3^L, b_4^L; \omega_{\beta^L}), (b_1^U, b_2^U, b_3^U, b_4^U; \omega_{\beta^U})]$ 是两个区间梯形模糊数, 把区间梯形模糊看出两个G-梯形模糊数由公式(7-30)计算可得到 $\alpha^L, \alpha^U, \beta^L$ 和 β^U 的中心重心点分别为: $(X_{\alpha^L}, Y_{\alpha^L}), (X_{\alpha^U}, Y_{\alpha^U}), (X_{\beta^L}, Y_{\beta^L}), (X_{\beta^U}, Y_{\beta^U})$, 则两个区间梯形模糊数 α 和 β 的中心重心点分别为:

$$\begin{cases} X_\alpha = (X_{\alpha^L} + X_{\alpha^U})/2, \\ Y_\alpha = (Y_{\alpha^L} + Y_{\alpha^U})/2, \end{cases} \quad (7-31)$$

$$\begin{cases} X_\beta = (X_{\beta^L} + X_{\beta^U})/2, \\ Y_\beta = (Y_{\beta^L} + Y_{\beta^U})/2, \end{cases} \quad (7-32)$$

定义两个区间梯形模糊数的距离为:

$$d_\alpha = \sqrt{X_\alpha^2 + Y_\alpha^2}, \quad (7-33)$$

$$d_\beta = \sqrt{X_\beta^2 + Y_\beta^2}. \quad (7-34)$$

若 $d_\alpha \geq d_\beta$, 则区间梯形模糊数 $\alpha \geq \beta$, 或者 α 优于 β 。

定义7.11 设 $\alpha = [\alpha^L, \alpha^U] = [(a_1^L, a_2^L, a_3^L, a_4^L; \omega_{\alpha^L}), (a_1^U, a_2^U, a_3^U, a_4^U; \omega_{\alpha^U})]$ 和 $\beta = [\beta^L, \beta^U] = [(b_1^L, b_2^L, b_3^L, b_4^L; \omega_{\beta^L}), (b_1^U, b_2^U, b_3^U, b_4^U; \omega_{\beta^U})]$ 是两个区间梯形模糊数, 那么它们之间的相似度定义如下:

$$S(\alpha, \beta) = 1 - \min(\omega_{\alpha^L}, \omega_{\beta^L}) \times \frac{\sum_{i=1}^4 |a_i^L - b_i^L|}{4} - \min(\omega_{\alpha^U}, \omega_{\beta^U}) \times \frac{\sum_{i=1}^4 |a_i^U - b_i^U|}{4}. \quad (7-35)$$

定理 7.5. 定义7.11中两个区间梯形模糊数之间的相似度 $S(\alpha, \beta)$, 满足相似度的性质。

证明. (P1) $S(\alpha, \beta) \geq 0$ 显然成立, 下证 $S(\alpha, \beta) \leq 1$ 。

因为 $0 \leq a_1^L \leq a_2^L \leq a_3^L \leq a_4^L \leq 1, 0 \leq a_1^U \leq a_2^U \leq a_3^U \leq a_4^U \leq 1, 0 \leq \omega_{\alpha^L} \leq \omega_{\alpha^U} \leq 1, 0 \leq b_1^L \leq b_2^L \leq b_3^L \leq b_4^L \leq 1, 0 \leq b_1^U \leq b_2^U \leq b_3^U \leq b_4^U \leq 1, 0 \leq \omega_{\beta^L} \leq \omega_{\beta^U} \leq 1$, 所以

$$\min(\omega_{\alpha^L}, \omega_{\beta^L}) \times \frac{\sum_{i=1}^4 |a_i^L - b_i^L|}{4} + \min(\omega_{\alpha^U}, \omega_{\beta^U}) \times \frac{\sum_{i=1}^4 |a_i^U - b_i^U|}{4} \geq 0, \quad (7-36)$$

把 (7-36) 代入 (7-35) 得: $S(\alpha, \beta) \leq 1$, 总之 $0 \leq S(\alpha, \beta) \leq 1$ 。

(P2) 若 $\alpha = \beta$, 即: $a_1^L = b_1^L, a_2^L = b_2^L, a_3^L = b_3^L, a_4^L = b_4^L, a_1^U = b_1^U, a_2^U = b_2^U, a_3^U = b_3^U, a_4^U = b_4^U$, 代入 (7-35) 得:

$$S(\alpha, \beta) = 1.$$

(P3)显然有:

$$S(\alpha, \beta) = 1 - \min(\omega_{\alpha^L}, \omega_{\beta^L}) \times \frac{\sum_{i=1}^4 |a_i^L - b_i^L|}{4} - \min(\omega_{\alpha^U}, \omega_{\beta^U}) \times \frac{\sum_{i=1}^4 |a_i^U - b_i^U|}{4} = S(\beta, \alpha).$$

证毕。 □

7.4.2 区间梯形模糊数型偏好多属性大群体决策方法

设某一决策问题有 p 个决策方案构成决策方案集 $A = \{A_1, A_2, \dots, A_p\}$, 决策专家从 n 个属性 ($C = \{C_1, C_2, \dots, C_n\}$) 对上述 p 个方案进行评价, 决策者邀请 m 个专家对该决策问题进行评价, m 个专家构成集合 $G = \{G_1, G_2, \dots, G_m\}$ 。专家根据区间梯形模糊数语言值对上述方案从 n 个属性进行评价, 则第 k 个专家 G_k 对第 i 个方案 A_i 的区间梯形模糊数型的偏好矢量为:

$$v_i^k = \{ \langle C_1, [(a_{i11}^{kL}, a_{i12}^{kL}, a_{i13}^{kL}, a_{i14}^{kL}; \omega_{C_1^k}^k), (b_{i11}^{kU}, b_{i12}^{kU}, b_{i13}^{kU}, b_{i14}^{kU}; \omega_{C_1^k}^k)] \rangle, \langle C_2, [(a_{i21}^{kL}, a_{i22}^{kL}, a_{i23}^{kL}, a_{i24}^{kL}; \omega_{C_2^k}^k), (b_{i21}^{kU}, b_{i22}^{kU}, b_{i23}^{kU}, b_{i24}^{kU}; \omega_{C_2^k}^k)] \rangle, \dots, \langle C_n, [(a_{in1}^{kL}, a_{in2}^{kL}, a_{in3}^{kL}, a_{in4}^{kL}; \omega_{C_n^k}^k), (b_{in1}^k, b_{in2}^k, b_{in3}^k, a_{in4}^k; \omega_{C_n^k}^k)] \rangle \},$$

对于每个方案 A_i ，其群体偏好矢量为：

$$\begin{aligned}
 U_i = & \{ < C_1, [(\frac{\sum_{k=1}^m a_{i11}^{kL}}{m}, \frac{\sum_{k=1}^m a_{i12}^{kL}}{m}, \frac{\sum_{k=1}^m a_{i13}^{kL}}{m}, \frac{\sum_{k=1}^m a_{i14}^{kL}}{m}; \min\{\omega_{C_1^L}^k\}), \\
 & (\frac{\sum_{k=1}^m b_{i11}^{kU}}{m}, \frac{\sum_{k=1}^m b_{i12}^{kU}}{m}, \frac{\sum_{k=1}^m b_{i13}^{kU}}{m}, \frac{\sum_{k=1}^m b_{i14}^{kU}}{m}; \min\{\omega_{C_1^U}^k\})] >, \\
 & < C_2, [(\frac{\sum_{k=1}^m a_{i21}^{kL}}{m}, \frac{\sum_{k=1}^m a_{i22}^{kL}}{m}, \frac{\sum_{k=1}^m a_{i23}^{kL}}{m}, \frac{\sum_{k=1}^m a_{i24}^{kL}}{m}; \min\{\omega_{C_2^L}^k\}), \\
 & (\frac{\sum_{k=1}^m b_{i21}^{kU}}{m}, \frac{\sum_{k=1}^m b_{i22}^{kU}}{m}, \frac{\sum_{k=1}^m b_{i23}^{kU}}{m}, \frac{\sum_{k=1}^m b_{i24}^{kU}}{m}; \min\{\omega_{C_2^U}^k\})] >, \dots, \\
 & < C_n, [(\frac{\sum_{k=1}^m a_{in1}^{kL}}{m}, \frac{\sum_{k=1}^m a_{in2}^{kL}}{m}, \frac{\sum_{k=1}^m a_{in3}^{kL}}{m}, \frac{\sum_{k=1}^m a_{in4}^{kL}}{m}; \min\{\omega_{C_n^L}^k\}), \\
 & (\frac{\sum_{k=1}^m b_{in1}^{kU}}{m}, \frac{\sum_{k=1}^m b_{in2}^{kU}}{m}, \frac{\sum_{k=1}^m b_{in3}^{kU}}{m}, \frac{\sum_{k=1}^m b_{in4}^{kU}}{m}; \min\{\omega_{C_n^U}^k\})] >, \end{aligned} \tag{7-37}$$

对于不同的属性 C_j ($j = 1, 2, \dots, n$)，其属性权重值是用区间梯形模糊数表示的，由决策者给出，那么属性的 C_j 的属性权重值记为： $w_j = [(a_1^L, a_2^L, a_3^L, a_4^L; \omega_{w_j^L}), (a_1^U, a_2^U, a_3^U, a_4^U; \omega_{w_j^U})]$ ($j = 1, 2, \dots, n$)。可由公式 (7-33) 计算得到 w_j ($j = 1, 2, \dots, n$)的距离权重值。

那么把(7-33)式得到 w_j ($j = 1, 2, \dots, n$)的距离权重值标准化可得到每个属性的权重值。

$$\bar{w}_j = \frac{d(w_j)}{\sum_{i=1}^n d(w_j)}. \tag{7-38}$$

该决策问题的决策步骤可简单概括为：

步骤 1 利用表7-12， m 个决策专家给出各个方案的区间梯形模糊数型偏好矢量。

步骤 2 由 (7-37) 式计算得到 p 个方案的群体偏好矢量。

步骤 3 决策者给出理想方案的区间梯形模糊数型偏好矢量。

步骤 4 由 (7-35) 计算得到每个方案的群体偏好矢量与理想方案的偏好矢量之间的相似度矩阵为：

$$T = \begin{pmatrix} t_1^1 & t_1^2 & \dots & t_1^p \\ t_2^1 & t_2^2 & \dots & t_2^p \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ t_n^1 & t_n^2 & \dots & t_n^p \end{pmatrix},$$

表 7-12 语言值与区间梯形模糊数对照表

标度	语言变量	区间梯形模糊数
1	绝对差	$[(0.00, 0.00, 0.00, 0.00; 0.80), (0.00, 0.00, 0.00, 0.00; 1.00)]$
2	非常差	$[(0.00, 0.00, 0.02, 0.07; 0.80), (0.00, 0.00, 0.02, 0.07; 1.00)]$
3	极差	$[(0.04, 0.10, 0.18, 0.23; 0.80), (0.04, 0.10, 0.18, 0.23; 1.00)]$
4	差	$[(0.17, 0.22, 0.36, 0.42; 0.80), (0.17, 0.22, 0.36, 0.42; 1.00)]$
5	中等	$[(0.32, 0.41, 0.58, 0.65; 0.80), (0.32, 0.41, 0.58, 0.65; 1.00)]$
6	好	$[(0.58, 0.63, 0.80, 0.86; 0.80), (0.58, 0.63, 0.80, 0.86; 1.00)]$
7	极好	$[(0.72, 0.78, 0.92, 0.97; 0.80), (0.72, 0.78, 0.92, 0.97; 1.00)]$
8	非常好	$[(0.93, 0.98, 1.00, 1.00; 0.80), (0.93, 0.98, 1.00, 1.00; 1.00)]$
9	绝对好	$[(1.00, 1.00, 1.00, 1.00; 0.80), (1.00, 1.00, 1.00, 1.00; 1.00)]$

其中 t_i^j 表示第 i 个方案第 j 个属性区间梯形模糊数与理想方案 j 个属性区间梯形模糊数之间的相似度。

步骤 5 由 (7-33) 得到每个属性的距离权重, 再由 (7-38) 标准化得到其权重矢量, 记权重矢量为: $\bar{W} = (\bar{w}_1, \bar{w}_2, \dots, \bar{w}_n)$.

步骤 6 各个方案 $A = \{A_1, A_2, \dots, A_p\}$ 的排列顺序, 可由下列等式得到:

$$O = \bar{W}T = (\bar{w}_1, \bar{w}_2, \dots, \bar{w}_n) \begin{pmatrix} t_1^1 & t_1^2 & \dots & t_1^p \\ t_2^1 & t_2^2 & \dots & t_2^p \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ t_n^1 & t_n^2 & \dots & t_n^p \end{pmatrix} = (O_1, O_2, \dots, O_p). \quad (7-39)$$

根据最大决策原则。则最优方案为:

$$Best\ alternative = \max_{1 \leq i \leq p} \{O_i\}. \quad (7-40)$$

7.4.3 案例分析

某化工厂发生氯气泄漏事故, 10个专家组成专家组, 对已制定的4个可供选择的决策方案, 从中选出最优方案。4个方案分别为: 方案1(A_1), 风扇通风5小时以及工人停工1天; 方案2(A_2), 无任何措施, 工人停工2天; 方案3(A_3), 消防队安排了一台消防车现场进行监控, 工人继续上班; 方案4(A_4), 风扇通风10小时, 并且工人继续上班。从下面四个决策属性: (1) 直接经济损失(C_1); (2) 生态环境污染(C_2); (3) 工人健康(C_3); (4) 社会影响(C_4) 对上述方案进行评价, 参照表7-12对各个方案的评价判断。

该决策问题的决策步骤可简单概括为:

步骤 1 利用表7-12, 10个决策专家给出4个方案的区间梯形模糊数型偏好矢量, 见表7-13和表7-14。

表 7-13 10个决策专家关于方案 A_1 和 A_2 的区间梯形模糊偏好矢量

方 案	成 员	属性1 属性3	属性2 属性4
A_1	1	[(0.00, 0.00, 0.02, 0.07; 0.8), (0.00, 0.00, 0.02, 0.07; 1.0)]	[(0.32, 0.41, 0.58, 0.65; 0.8), (0.32, 0.41, 0.58, 0.65; 1.0)]
	2	[(0.04, 0.10, 0.18, 0.23; 0.8), (0.04, 0.10, 0.18, 0.23; 1.0)]	[(0.17, 0.22, 0.36, 0.42; 0.8), (0.17, 0.22, 0.36, 0.42; 1.0)]
	3	[(0.32, 0.41, 0.58, 0.65; 0.8), (0.32, 0.41, 0.58, 0.65; 1.0)]	[(0.32, 0.41, 0.58, 0.65; 0.8), (0.32, 0.41, 0.58, 0.65; 1.0)]
	4	[(0.32, 0.41, 0.58, 0.65; 0.8), (0.32, 0.41, 0.58, 0.65; 1.0)]	[(0.04, 0.10, 0.18, 0.23; 0.8), (0.04, 0.10, 0.18, 0.23; 1.0)]
	5	[(0.32, 0.41, 0.58, 0.65; 0.8), (0.32, 0.41, 0.58, 0.65; 1.0)]	[(0.58, 0.63, 0.80, 0.86; 0.8), (0.58, 0.63, 0.80, 0.86; 1.0)]
	6	[(0.32, 0.41, 0.58, 0.65; 0.8), (0.32, 0.41, 0.58, 0.65; 1.0)]	[(0.00, 0.00, 0.02, 0.07; 0.8), (0.00, 0.00, 0.02, 0.07; 1.0)]
	7	[(0.72, 0.78, 0.92, 0.97; 0.8), (0.72, 0.78, 0.92, 0.97; 1.0)]	[(0.04, 0.10, 0.18, 0.23; 0.8), (0.04, 0.10, 0.18, 0.23; 1.0)]
	8	[(0.58, 0.63, 0.80, 0.86; 0.8), (0.58, 0.63, 0.80, 0.86; 1.0)]	[(0.58, 0.63, 0.80, 0.86; 0.8), (0.58, 0.63, 0.80, 0.86; 1.0)]
	9	[(0.17, 0.22, 0.36, 0.42; 0.8), (0.17, 0.22, 0.36, 0.42; 1.0)]	[(0.00, 0.00, 0.02, 0.07; 0.8), (0.00, 0.00, 0.02, 0.07; 1.0)]
	10	[(0.58, 0.63, 0.80, 0.86; 0.8), (0.58, 0.63, 0.80, 0.86; 1.0)]	[(0.17, 0.22, 0.36, 0.42; 0.8), (0.17, 0.22, 0.36, 0.42; 1.0)]
A_2	1	[(0.32, 0.41, 0.58, 0.65; 0.8), (0.32, 0.41, 0.58, 0.65; 1.0)]	[(0.58, 0.63, 0.80, 0.86; 0.8), (0.58, 0.63, 0.80, 0.86; 1.0)]
	2	[(0.04, 0.10, 0.18, 0.23; 0.8), (0.04, 0.10, 0.18, 0.23; 1.0)]	[(0.32, 0.41, 0.58, 0.65; 0.8), (0.32, 0.41, 0.58, 0.65; 1.0)]
	3	[(0.72, 0.78, 0.92, 0.97; 0.8), (0.72, 0.78, 0.92, 0.97; 1.0)]	[(0.58, 0.63, 0.80, 0.86; 0.8), (0.58, 0.63, 0.80, 0.86; 1.0)]
	4	[(0.58, 0.63, 0.80, 0.86; 0.8), (0.58, 0.63, 0.80, 0.86; 1.0)]	[(0.72, 0.78, 0.92, 0.97; 0.8), (0.72, 0.78, 0.92, 0.97; 1.0)]
	5	[(0.58, 0.63, 0.80, 0.86; 0.8), (0.58, 0.63, 0.80, 0.86; 1.0)]	[(0.72, 0.78, 0.92, 0.97; 0.8), (0.72, 0.78, 0.92, 0.97; 1.0)]
	6	[(0.72, 0.78, 0.92, 0.97; 0.8), (0.72, 0.78, 0.92, 0.97; 1.0)]	[(0.58, 0.63, 0.80, 0.86; 0.8), (0.58, 0.63, 0.80, 0.86; 1.0)]
	7	[(0.04, 0.10, 0.18, 0.23; 0.8), (0.04, 0.10, 0.18, 0.23; 1.0)]	[(0.72, 0.78, 0.92, 0.97; 0.8), (0.72, 0.78, 0.92, 0.97; 1.0)]
	8	[(0.58, 0.63, 0.80, 0.86; 0.8), (0.58, 0.63, 0.80, 0.86; 1.0)]	[(0.17, 0.22, 0.36, 0.42; 0.8), (0.17, 0.22, 0.36, 0.42; 1.0)]
	9	[(0.72, 0.78, 0.92, 0.97; 0.8), (0.72, 0.78, 0.92, 0.97; 1.0)]	[(0.58, 0.63, 0.80, 0.86; 0.8), (0.58, 0.63, 0.80, 0.86; 1.0)]
	10	[(0.58, 0.63, 0.80, 0.86; 0.8), (0.58, 0.63, 0.80, 0.86; 1.0)]	[(0.32, 0.41, 0.58, 0.65; 0.8), (0.32, 0.41, 0.58, 0.65; 1.0)]

步骤 2 由 (7-37) 式计算得到4个方案的群体偏好矢量, 分别为:

$$U_1 = \{[(0.398, 0.457, 0.582, 0.636; 0.8), (0.398, 0.457, 0.582, 0.636; 1.0)],$$

$$[(0.222, 0.272, 0.388, 0.446; 0.8), (0.222, 0.272, 0.388, 0.446; 1.0)],$$

$$[(0.280, 0.337, 0.480, 0.542; 0.8), (0.280, 0.337, 0.480, 0.542; 1.0)],$$

$$[(0.450, 0.481, 0.548, 0.581; 0.8), (0.450, 0.481, 0.548, 0.581; 1.0)]\};$$

$$U_2 = \{[(0.488, 0.547, 0.690, 0.746; 0.8), (0.488, 0.547, 0.690, 0.746; 1.0)],$$

$$[(0.529, 0.590, 0.748, 0.807; 0.8), (0.529, 0.590, 0.748, 0.807; 1.0)],$$

$$[(0.357, 0.435, 0.602, 0.669; 0.8), (0.357, 0.435, 0.602, 0.669; 1.0)],$$

$$[(0.418, 0.464, 0.548, 0.588; 0.8), (0.418, 0.464, 0.548, 0.588; 1.0)]\};$$

表 7-14 10个决策专家关于方案 A_3 和 A_4 的区间梯形模糊偏好矢量

方 成	属性1	属性2	
案 员	属性3	属性4	
A_3	1	[(0.04, 0.10, 0.18, 0.23; 0.8), (0.04, 0.10, 0.18, 0.23; 1.0)]	[(0.17, 0.22, 0.36, 0.42; 0.8), (0.17, 0.22, 0.36, 0.42; 1.0)]
		[(0.58, 0.63, 0.80, 0.86; 0.8), (0.58, 0.63, 0.80, 0.86; 1.0)]	[(0.93, 0.98, 1.00, 1.00; 0.8), (0.93, 0.98, 1.00, 1.00; 1.0)]
	2	[(0.32, 0.41, 0.58, 0.65; 0.8), (0.32, 0.41, 0.58, 0.65; 1.0)]	[(0.58, 0.63, 0.80, 0.86; 0.8), (0.58, 0.63, 0.80, 0.86; 1.0)]
		[(0.32, 0.41, 0.58, 0.65; 0.8), (0.32, 0.41, 0.58, 0.65; 1.0)]	[(0.17, 0.22, 0.36, 0.42; 0.8), (0.17, 0.22, 0.36, 0.42; 1.0)]
	3	[(0.04, 0.10, 0.18, 0.23; 0.8), (0.04, 0.10, 0.18, 0.23; 1.0)]	[(0.58, 0.63, 0.80, 0.86; 0.8), (0.58, 0.63, 0.80, 0.86; 1.0)]
		[(0.00, 0.00, 0.02, 0.07; 0.8), (0.00, 0.00, 0.02, 0.07; 1.0)]	[(0.58, 0.63, 0.80, 0.86; 0.8), (0.58, 0.63, 0.80, 0.86; 1.0)]
	4	[(0.32, 0.41, 0.58, 0.65; 0.8), (0.32, 0.41, 0.58, 0.65; 1.0)]	[(0.72, 0.78, 0.92, 0.97; 0.8), (0.72, 0.78, 0.92, 0.97; 1.0)]
		[(0.32, 0.41, 0.58, 0.65; 0.8), (0.32, 0.41, 0.58, 0.65; 1.0)]	[(0.32, 0.41, 0.58, 0.65; 0.8), (0.32, 0.41, 0.58, 0.65; 1.0)]
	5	[(0.32, 0.41, 0.58, 0.65; 0.8), (0.32, 0.41, 0.58, 0.65; 1.0)]	[(0.58, 0.63, 0.80, 0.86; 0.8), (0.58, 0.63, 0.80, 0.86; 1.0)]
		[(0.04, 0.10, 0.18, 0.23; 0.8), (0.04, 0.10, 0.18, 0.23; 1.0)]	[(0.32, 0.41, 0.58, 0.65; 0.8), (0.32, 0.41, 0.58, 0.65; 1.0)]
A_4	1	[(0.17, 0.22, 0.36, 0.42; 0.8), (0.17, 0.22, 0.36, 0.42; 1.0)]	[(0.04, 0.10, 0.18, 0.23; 0.8), (0.04, 0.10, 0.18, 0.23; 1.0)]
		[(0.72, 0.78, 0.92, 0.97; 0.8), (0.72, 0.78, 0.92, 0.97; 1.0)]	[(0.58, 0.63, 0.80, 0.86; 0.8), (0.58, 0.63, 0.80, 0.86; 1.0)]
	2	[(0.04, 0.10, 0.18, 0.23; 0.8), (0.04, 0.10, 0.18, 0.23; 1.0)]	[(0.58, 0.63, 0.80, 0.86; 0.8), (0.58, 0.63, 0.80, 0.86; 1.0)]
		[(0.17, 0.22, 0.36, 0.42; 0.8), (0.17, 0.22, 0.36, 0.42; 1.0)]	[(0.00, 0.00, 0.00, 0.00; 0.8), (0.00, 0.00, 0.00, 0.00; 1.0)]
	3	[(0.93, 0.98, 1.00, 1.00; 0.8), (0.93, 0.98, 1.00, 1.00; 1.0)]	[(0.32, 0.41, 0.58, 0.65; 0.8), (0.32, 0.41, 0.58, 0.65; 1.0)]
		[(0.58, 0.63, 0.80, 0.86; 0.8), (0.58, 0.63, 0.80, 0.86; 1.0)]	[(1.00, 1.00, 1.00, 1.00; 0.8), (1.00, 1.00, 1.00, 1.00; 1.0)]
	4	[(0.04, 0.10, 0.18, 0.23; 0.8), (0.04, 0.10, 0.18, 0.23; 1.0)]	[(0.58, 0.63, 0.80, 0.86; 0.8), (0.58, 0.63, 0.80, 0.86; 1.0)]
		[(0.32, 0.41, 0.58, 0.65; 0.8), (0.32, 0.41, 0.58, 0.65; 1.0)]	[(0.00, 0.00, 0.02, 0.07; 0.8), (0.00, 0.00, 0.02, 0.07; 1.0)]
	5	[(0.32, 0.41, 0.58, 0.65; 0.8), (0.32, 0.41, 0.58, 0.65; 1.0)]	[(0.32, 0.41, 0.58, 0.65; 0.8), (0.32, 0.41, 0.58, 0.65; 1.0)]
		[(0.17, 0.22, 0.36, 0.42; 0.8), (0.17, 0.22, 0.36, 0.42; 1.0)]	[(0.00, 0.00, 0.02, 0.07; 0.8), (0.00, 0.00, 0.02, 0.07; 1.0)]
A_4	6	[(0.58, 0.63, 0.80, 0.86; 0.8), (0.58, 0.63, 0.80, 0.86; 1.0)]	[(0.58, 0.63, 0.80, 0.86; 0.8), (0.58, 0.63, 0.80, 0.86; 1.0)]
		[(0.32, 0.41, 0.58, 0.65; 0.8), (0.32, 0.41, 0.58, 0.65; 1.0)]	[(0.17, 0.22, 0.36, 0.42; 0.8), (0.17, 0.22, 0.36, 0.42; 1.0)]
	7	[(0.32, 0.41, 0.58, 0.65; 0.8), (0.32, 0.41, 0.58, 0.65; 1.0)]	[(0.17, 0.22, 0.36, 0.42; 0.8), (0.17, 0.22, 0.36, 0.42; 1.0)]
		[(0.58, 0.63, 0.80, 0.86; 0.8), (0.58, 0.63, 0.80, 0.86; 1.0)]	[(0.32, 0.41, 0.58, 0.65; 0.8), (0.32, 0.41, 0.58, 0.65; 1.0)]
	8	[(0.17, 0.22, 0.36, 0.42; 0.8), (0.17, 0.22, 0.36, 0.42; 1.0)]	[(0.17, 0.22, 0.36, 0.42; 0.8), (0.17, 0.22, 0.36, 0.42; 1.0)]
		[(0.58, 0.63, 0.80, 0.86; 0.8), (0.58, 0.63, 0.80, 0.86; 1.0)]	[(0.72, 0.78, 0.92, 0.97; 0.8), (0.72, 0.78, 0.92, 0.97; 1.0)]
	9	[(0.04, 0.10, 0.18, 0.23; 0.8), (0.04, 0.10, 0.18, 0.23; 1.0)]	[(0.58, 0.63, 0.80, 0.86; 0.8), (0.58, 0.63, 0.80, 0.86; 1.0)]
		[(0.17, 0.22, 0.36, 0.42; 0.8), (0.17, 0.22, 0.36, 0.42; 1.0)]	[(0.17, 0.22, 0.36, 0.42; 0.8), (0.17, 0.22, 0.36, 0.42; 1.0)]
	10	[(0.72, 0.78, 0.92, 0.97; 0.8), (0.72, 0.78, 0.92, 0.97; 1.0)]	[(0.72, 0.78, 0.92, 0.97; 0.8), (0.72, 0.78, 0.92, 0.97; 1.0)]
		[(0.17, 0.22, 0.36, 0.42; 0.8), (0.17, 0.22, 0.36, 0.42; 1.0)]	[(0.04, 0.10, 0.18, 0.23; 0.8), (0.04, 0.10, 0.18, 0.23; 1.0)]

$$U_3 = \{[(0.323, 0.384, 0.512, 0.570; 0.8), (0.323, 0.384, 0.512, 0.570; 1.0)],$$

$$[(0.388, 0.440, 0.574, 0.631; 0.8), (0.388, 0.440, 0.574, 0.631; 1.0)],$$

$$[(0.297, 0.363, 0.506, 0.569; 0.8), (0.297, 0.363, 0.506, 0.569; 1.0)],$$

$$[(0.458, 0.511, 0.630, 0.679; 0.8), (0.458, 0.511, 0.630, 0.679; 1.0)]\};$$

$$U_4 = \{[(0.333, 0.395, 0.514, 0.566; 0.8), (0.333, 0.395, 0.514, 0.566; 1.0)],$$

$$[(0.406, 0.466, 0.618, 0.678; 0.8), (0.406, 0.466, 0.618, 0.678; 1.0)],$$

$$[(0.378, 0.437, 0.592, 0.653; 0.8), (0.378, 0.437, 0.592, 0.653; 1.0)],$$

$$[(0.300, 0.336, 0.424, 0.469; 0.8), (0.300, 0.336, 0.424, 0.469; 1.0)]\}.$$

步骤 3 决策者给出理想方案的区间梯形模糊数型偏好矢量为:

$$V_P = \{[(0.93, 0.98, 1.00, 1.00; 0.8), (0.93, 0.98, 1.00, 1.00; 1.0)], \\ [(1.00, 1.00, 1.00, 1.00; 0.8), (1.00, 1.00, 1.00, 1.00; 1.0)], \\ [(1.00, 1.00, 1.00, 1.00; 0.8), (1.00, 1.00, 1.00, 1.00; 1.0)], \\ [(0.93, 0.98, 1.00, 1.00; 0.8), (0.93, 0.98, 1.00, 1.00; 1.0)]\}.$$

步骤 4 由 (7-35) 计算得到每个方案的群体偏好矢量与理想方案的偏好矢量之间的相似度矩阵为:

$$T = \begin{pmatrix} 0.1733 & 0.2024 & 0.0625 & 0.1675 \\ 0.3524 & 0.4033 & 0.1284 & 0.1486 \\ 0.0455 & 0.1148 & 0.0192 & 0.2656 \\ 0.0541 & 0.1756 & 0.1270 & 0.0715 \end{pmatrix}.$$

步骤 5 决策者给出四个决策属性的区间梯形模糊数分别为:

$$w_1 = \langle C_1, [(0.32, 0.41, 0.58, 0.65; 0.8), (0.32, 0.41, 0.58, 0.65; 1.0)] \rangle, \\ w_2 = \langle C_2, [(0.72, 0.78, 0.92, 0.97; 0.8), (0.72, 0.78, 0.92, 0.97; 1.0)] \rangle, \\ w_3 = \langle C_3, [(0.17, 0.22, 0.36, 0.42; 0.8), (0.17, 0.22, 0.36, 0.42; 1.0)] \rangle, \\ w_4 = \langle C_4, [(0.93, 0.98, 1.00, 1.00; 0.8), (0.93, 0.98, 1.00, 1.00; 1.0)] \rangle.$$

由 (7-33) 得到每个属性的距离权重 $d_1 = 0.5942$ 、 $d_2 = 0.9301$ 、 $d_3 = 0.4830$ 、 $d_4 = 1.0331$, 再由 (7-38) 标准化得到其权重矢量, 记权重矢量为: $\bar{W} = (0.1954, 0.3059, 0.1589, 0.3398)$.

步骤 6 各个方案 $A = \{A_1, A_2, \dots, A_4\}$ 的排列顺序, 由 (7-39) 可得到:

$$O = \bar{W}T = (0.1954, 0.3059, 0.1589, 0.3398) \begin{pmatrix} 0.1733 & 0.2024 & 0.0625 & 0.1675 \\ 0.3524 & 0.4033 & 0.1284 & 0.1486 \\ 0.0455 & 0.1148 & 0.0192 & 0.2656 \\ 0.0541 & 0.1756 & 0.1270 & 0.0715 \end{pmatrix} \\ = (0.1673, 0.2408, 0.0977, 0.1447).$$

那么四个决策方案的排序为: $A_2 \succ A_1 \succ A_4 \succ A_3$, 根据最大决策原则, 则最优方案为 A_2 。

7.4.4 小结

在应急大群体决策问题中,在最短的时间选出最优的解决方案是应急大群体决问题的一个显著的特点。本节针对应急大群体多属性决策问题特点,探讨了用区间梯形模糊数表示决策者的偏好信息的决策方法,该方法通过两个决策专家之间的区间梯形模糊数型偏好矢量之间的相似度,得到群体相似度矩阵,由加权集结算子得出方案的排序向量,由最大决策原则选出最优方案。最后通过一应急决策问题中毒气泄漏的案例讨论本节的决策方法,从给出的案例结果比较中,易看出本节的决策方法是实用的、有效的。该方法相对于其它方法计算比较简洁,实施比较简单,因此在模糊偏好下多属性应急决策问题中有广阔的应用前景。

7.5 本章小结

近年来,关于梯形模糊数以及其拓展形似(参数型直觉梯形模糊数、区间梯形模糊数、区间直觉梯形模糊数)在多属性决策问题中的应用刚刚起步。目前,大部分参考文献用梯形模糊数以及其拓展形似(参数型直觉梯形模糊数、区间梯形模糊数、区间直觉梯形模糊数)表示决策者的偏好信息,较少的使用它们表示决策属性的权重,更较少的涉及模糊偏好下多属性大群体应急决策问题。本章从实际问题出发,分别讨论了梯形模糊数型偏好多属性大群体决策问题、参数型直觉梯形模糊数型偏好多属性大群体决问题、考虑属性二元关系的参数型直觉梯形模糊数型偏好多属性大群体决策问题以及区间梯形模糊数型偏好多属性大群体问题。针对上述每种类型的多属性大群体问题,构造相应的相似度模型,在这些相似度模型基础上,考虑决策属性的梯形模糊数型以及其拓展形似型(参数型直觉梯形模糊数、区间梯形模糊数、区间直觉梯形模糊数)属性权重、决策专家权重信息,给出相应的模糊偏好下多属性大群体决策方法。最后用相应的案例来讨论各小节给出的决策方法的可行性,案例实施过程比较简单,案例结果表明本章所给出的相应的模糊偏好下多属性大群体决策方法是有效的。在以后的研究工作,将吸取本章所给方法的优势,去解决其他类型偏好下的模糊多属性大群体决策问题。

8 结论与展望

8.1 本文结论

在过去的几十年里,群决策理论和方法取得了丰硕的研究成果,它们被广泛应用于社会学、经济学、军事科学、计算机和通信网络等方面。随着社会和经济的发展,群决策理论与方法也被广泛应用到应急管理决策问题中,本文根据应急决策出现的新特点,提出了复杂偏好的概念,并给出了复杂偏好下多属性大群体决策方法。最后,把这些方法应用于解决应急决策问题,案例结果表明本文方法是有效的、可行的。

8.1.1 主要工作

本文的主要工作有:

(1) 介绍研究背景、研究目的和意义,对论文相关研究现状做了文献综述,包括复杂偏好下多属性大群体决策问题的研究现状以及相似度模型的研究现状,阐述本文主要研究的问题,提出复杂偏好的概念。

(2) 考虑决策属性独立时,对确定型偏好下多属性大群体决策方法问题进行研究,主要讨论矢量型偏好,给出了解决矢量偏好下多属性大群体决策问题的变系数相似度模型,并证明该模型满足(1)自反性;(2)对称性;(3)有界性,为了进一步验证该模型的优点,同时把与文献中已有的其他三种相似度的进行算例比较,数值结果表明变系数相似度不仅弥补现有的相似度的缺陷,更能准确刻画两矢量之间的相似性。为了说明变系数相似度的实用性,把该模型应用到应急决策中冰雪灾害能力评价问题中,案例结果表明该模型的有效性和实用性。

(3) 考虑决策属性是关联的,分两方面对关联型偏好下多属性大群体决策问题进行研究。首先考虑属性间层次关系,提出了基于属性层次关系偏好下的多属性决策方法,该方法利用三角函数的性质,确定了层次关系下决策属性权重,同时给出了基于该方法的自然灾害等级评价模型及其算法,用2002年-2009年的全国自然灾害统计数据对基于层析关系偏好的评价模型进行应用,案例结果与实际情况一致。其次考虑决策属性之间的二元关系,提出了一种基于决策属性之间二元关系的大群体决策方法,该方法基于二元关系形成群体成员偏好矢量属性关系矩阵,借助0-1矩阵及其范数性质,构建了两个决策成员偏好矢量相似性度量模型,基于该模型提出了一种大群体决策聚类方法和决策方案排序方法,并将该方法与其他文献中聚类方法进行比较,数值结果表明该方法是有效的。最

后以湖南省重大冰雪灾害应急管理评价为案例, 对该方法进行了应用。

(4) 考虑决策属性独立时, 对模糊型偏好下多属性大群体决策问题进行研究。首先讨论了用模糊集和直觉模糊集来表示决策专家偏好信息和属性权重信息的多属性大群体决策问题, 给出两个模糊集之间的四种相似度以及两个直觉模糊集之间的J-相似度、E-相似度、C-相似度和变系数相似度, 并证明它们满足相似度所具有的性质; 同时考虑元素的权重, 提出加权J-相似度、加权E-相似度、加权C-相似度和加权变系数相似度。为了更好说明本文的E-相似度和变系数相似度模型的优势, 与已有文献的13种相似度进行比较, 数值结果表明本文的两种相似度有很好的识别性, 把它们应用于解决模糊模式识别问题、模糊医学诊断问题以及模糊多属性多方案决策问题。由于模糊环境下传统的大群体决策方法比较复杂, 借助于直觉模糊集的得分函数, 提出了基于直觉模糊集得分矢量间相似度的大群体决策方法, 通过应急决策案例详细讨论这种方法的有效性及其实用性。其次在模糊集的基础上, 从另一方面, 研究基于模糊数及其拓展形似(直觉模糊数、区间直觉模糊数、三角模糊数、参数型直觉三角模糊数、区间三角模糊数、梯形模糊数、直参数型直觉梯形模糊数、区间梯形模糊数)偏好下的多属性大群体决策问题, 基于两个模糊数及拓展形式之间的相似度提出模糊偏好下大群体决策方法。最后, 考虑决策属性之间的二元关系, 对参数型直觉梯形模糊数偏好下多属性大群体决策问题进行研究, 提出了基于属性二元关系的模糊偏好多属性大群体决策方法, 把该方法应用到应急决策问题中, 案例结果表明该方法是有效的、可行的。

8.1.2 创新点

(1) 对矢量偏好下多属性大群体决策问题, 构造了两个矢量之间的变系数相似度模型,

$$\begin{aligned} S(X, Y) &= \alpha \frac{2XY}{\|X\|_2^2 + \|Y\|_2^2} + (1 - \alpha) \frac{XY}{\|X\|_2 \|Y\|_2} \\ &= \alpha \frac{2 \sum_{i=1}^n x_i y_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{i=1}^n y_i^2} + (1 - \alpha) \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}}, \end{aligned}$$

并证明它满足相似度的性质。由各方案与理想方案之间的加权相似度, 排列方案, 选出最优方案。

(2) 对属性层次关系偏好下多属性大群体决策问题, 给出层次关联的属性权重确定方法, 由偏好集结思想, 各层偏好集结。确定评估备择集, 根据评估备择集, 确定每个评价对象的等级。

(3) 对属性二元关系偏好下多属性大群体决策问题, 利用决策偏好的二元

关系矩阵, 构造基于属性二元关系的相似度模型,

$$S_{ij}(X_i, X_j) = \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\|T_i + T_j\|_2}{\|T_i\|_\infty + \|T_j\|_\infty},$$

其中,

$$\|T\|_2 = (\rho(T'T))^{\frac{1}{2}}, \quad \|T_i\|_\infty = \max_{1 \leq j_1 \leq n} \sum_{j=1}^n |t_{ij}|.$$

在该模型的基础上, 给出大群体聚类方法, 得到各个方案的聚集偏好向量和群体偏好向量。再集结各方案的群体偏好向量, 选出最优方案。

(4) 对模糊(模糊集、直觉模糊集、模糊数、直觉模糊数、三角模糊数、参数型直觉三角模糊数、梯形模糊数、参数型直觉梯形模糊数、区间梯形模糊数)偏好下多属性大群体决策问题, 构造相应的模糊集(数)之间的相似度模型,

模糊集之间的相似度:

$$S_V^{FS}(A, B) = \alpha \frac{2AB}{\|A\|_2^2 + \|B\|_2^2} + (1 - \alpha) \frac{AB}{\|A\|_2 \|B\|_2},$$

其中 $AB = \sum_{i=1}^n \mu_A(x_i)\mu_B(x_i)$, $\|A\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n \mu_A^2(x_i)}$, $\|B\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n \mu_B^2(x_i)}$, 且 $0 \leq \alpha \leq 1$.

直觉模糊集之间的相似度:

$$S_V^{IFS}(A, B) = \alpha \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{2(\mu_A(x_i)\mu_B(x_i) + \nu_A(x_i)\nu_B(x_i))}{(\mu_A^2(x_i) + \nu_A^2(x_i)) + (\mu_B^2(x_i) + \nu_B^2(x_i))} + (1 - \alpha) \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\mu_A(x_i)\mu_B(x_i) + \nu_A(x_i)\nu_B(x_i)}{\sqrt{\mu_A^2(x_i) + \nu_A^2(x_i)}\sqrt{\mu_B^2(x_i) + \nu_B^2(x_i)}}.$$

三角模糊数之间的相似度:

$$S^J(\alpha, \beta) = \frac{\sum_{i=1}^3 a_i b_i}{\sum_{i=1}^3 a_i^2 + \sum_{i=1}^3 b_i^2 - \sum_{i=1}^3 a_i b_i},$$

$$S^E(\alpha, \beta) = \frac{2 \sum_{i=1}^3 a_i b_i}{\sum_{i=1}^3 a_i^2 + \sum_{i=1}^3 b_i^2},$$

$$S^C(\alpha, \beta) = \frac{\sum_{i=1}^3 a_i b_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^3 a_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^3 b_i^2}}.$$

参数型直觉三角模糊数之间的相似度:

$$S^H(\alpha_1, \alpha_2) = 1 - \frac{\sum_{i=1}^3 |a_{1i} - a_{2i}|}{3} - \frac{\sum_{i=1}^3 |b_{1i} - b_{2i}|}{3},$$

$$S^E(\alpha_1, \alpha_2) = 1 - \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^3 (a_{1i} - a_{2i})^2}{3} + \frac{\sum_{i=1}^3 (b_{1i} - b_{2i})^2}{3}},$$

和

$$S^F(\alpha_1, \alpha_2) = 1 - \max\left\{\frac{\sum_{i=1}^3 |a_{1i} - a_{2i}|}{3}, \frac{\sum_{i=1}^3 |b_{1i} - b_{2i}|}{3}\right\}.$$

梯形模糊数之间的相似度:

$$S_O = \sqrt{\sum_i^4 (a_i - b_i)^2}.$$

参数型直觉梯形模糊数偏好的期望矢量之间的相似度:

$$S^{12} = S(E^1, E^2) = \frac{1}{2} \frac{2E^1 E^2}{\|E^1\|_2 + \|E^2\|_2} + \frac{1}{2} \frac{2E^1 E^2}{\|E^1\|_2 \|E^2\|_2}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\sum_{i=1}^n e_i^1 e_i^2}{\sum_{i=1}^n (e_i^1)^2 + \sum_{i=1}^n (e_i^2)^2} + \frac{1}{2} \frac{\sum_{i=1}^n e_i^1 e_i^2}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (e_i^1)^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (e_i^2)^2}}$$

区间梯形模糊数之间的相似度:

$$S(\alpha, \beta) = 1 - \min(\omega_{\alpha^L}, \omega_{\beta^L}) \times \frac{\sum_{i=1}^4 |a_i^L - b_i^L|}{4}$$

$$- \min(\omega_{\alpha^U}, \omega_{\beta^U}) \times \frac{\sum_{i=1}^4 |a_i^U - b_i^U|}{4}.$$

给出模糊属性权重的确定方法, 求出各方案的群体模糊偏好矢量, 计算各方案的群体模糊偏好矢量与理想方案的模糊偏好矢量之间的加权相似度, 根据加权相似度大小来排列决策方案, 从中选出最优方案。

(5) 对基于属性二元关系的模糊偏好下的多属性大群体决策问题, 构造基于属性二元关系的相似度模型, 基于该模型, 给出大群体聚类算法和模糊属性权重确定方法, 集结各方案的聚类结果, 来排列决策方案, 选出最优方案。对语言值偏好下的多属性大群体决策问题, 用改进后的TOPSIS方法, 排列决策方案, 选出最优方案。

8.1.3 研究不足

本文的研究,存在以下不足:

- 1.没有考虑决策偏好之间的冲突。
- 2.没有考虑决策过程是多阶段的,下一步研究建立各阶段之间专家偏好的集结,寻找有效的多阶段群决策方法。
- 3.没有建立基于复杂偏好的大群体决策支持系统,设计其体系结构和功能结构,解决网络环境下复杂偏好的多属性大群体决策支持系统。

8.2 研究展望

随着社会经济和计算机科学技术的发展,应急决策需求的快速变化,复杂偏好下的多属性大群体决策问题也将不断发展以满足社会信息化和决策科学化的需要。今后进一步的工作主要有:

(1) 考虑群体一致性的复杂偏好下多属性群决策方法研究,在应急决策中,需要大量的专家参与决策,决策专家由于年龄、知识结构、教育背景、社会经验等因素,存在偏好差异。这就会使得大群体决策成员偏好之间存在不一致,如何消除决策偏好之间的差异,得到较为理想的决策结果,是本文以后要研究的工作之一。

(2) 复杂偏好下多阶段多属性群决策方法研究,在应急决策问题中,决策结果往往需要多个阶段来实现,如何建立各阶段之间专家偏好的集结,如何寻找有效的多阶段群决策方法也是本文以后研究的工作。

(3) 在应急决策中,决策属性之间存在复杂的关联性,本文只研究其中的两种:二元关系和层次关系,今后要将本文基于关联偏好的多属性群决策方法推广到其他关联属性,如属性之间的递推关系等。

(4) 以本文的模型为基础,建立基于复杂偏好的大群体决策支持系统,设计其体系结构和功能结构,使得模型驱动、数据和知识有机集成一起,重点解决网络环境下复杂偏好的多属性大群体决策支持系统。

参考文献

- [1] 徐选华. 面向特大自然灾害-复杂大群体决策模型及应用[M]. 北京: 科学出版社, 2012.
- [2] 岳超源. 决策理论与方法[M]. 北京: 科学出版社, 2003.
- [3] Saaty T. Multicriteria decision making: The analysis hierarchy process[M]. Pittsburgh: RWS Publications, 1990.
- [4] Liu H. W. Vague set methods of multi-criteria fuzzy decision making[J]. Theory and practice of System Engineering, 2004, 24: 103-109.
- [5] 唐加福, 汪怒伟. 模糊优化理论与方法的研究综述[J]. 控制理论与应用, 2000, 4: 159—164.
- [6] 陈守煜. 大系统模糊优化单元系统理论[J]. 系统工程理论与实践, 1994, 1(1): 1-10.
- [7] 王英. 水资源规划方案的模糊数学最佳选择[J]. 农业工程学报, 1998, 3: 247-249.
- [8] 和媛媛, 周德群, 王强. 基于模糊判断矩阵的群决策方法研究[J]. 中国管理科学, 2008, 16(2): 128-131.
- [9] 徐选华. 网络环境下模型驱动的复杂大群体决策支持系统研究[D]. 长沙: 中南大学博士学位论文, 2005.
- [10] Zahir S. Geometry of decision making and the vector space formulation of the AHP[M]. Working paper, University of Lethbridge, 1997.
- [11] Basak I., Saaty T. L. Group decision making using the analytic hierarchy process[J]. Mathematical & Computer Modelling, 1993, 17: 101-109.
- [12] Xu Z. S. An automatic approach to reaching consensus in multiple attribute group decision making [J]. Computers & Industrial Engineering, 2009, 56: 1369-1374.
- [13] Dong Y., Zhang G., Hong W. et al. Consensus models for AHP group decision making under row geometric mean prioritization method[J]. Decision Support Systems, 2010, 49: 281-289.
- [14] 徐选华, 陈晓红. 一种多属性多方案大群体决策方法研究[J]. 系统工程学报, 2008, 23(2): 137-141.

- [15] 徐选华, 陈晓红, 王红伟. 一种面向效用值偏好信息的大群体决策方法[J]. 控制与决策, 2009, 24(3): 440-450.
- [16] Gregson M. Psychometrics of Similarity[M]. Academic press, New York, 1975.
- [17] Tversky A. Features of similarity [J]. Psychology Review, 1977, 84: 327-352.
- [18] Parui S., Majumder D. A new definition of shape similarity[J]. Pattern Recognition Letters, 1982, 1: 37-42.
- [19] Rao N. On similarity between finite sets in plane [J]. Pattern Recognition, 1991, 24: 891-893.
- [20] Zadeh L. A. Fuzzy sets[J]. Information and Control, 1965, 8: 338-356.
- [21] Chen S. M., Yeh M. S., Hsiao P. Y. A comparison of similarity measures of fuzzy values[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1995, 72: 79-89.
- [22] Pappis C. P., Karacapilidis N. I. A comparative assessment of measures of similarity of fuzzy values[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1993, 56: 171-174.
- [23] Wang W. J. New similarity measures on fuzzy sets and on elements [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1997, 85: 305-309.
- [24] Gerstenkorn T., Manko J. Correlation of intuitionistic fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1991, 44: 39-43.
- [25] Atanassov K. Intuitionistic fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1986, 20, 87-96.
- [26] Li D., Cheng C. New similarity measures of intuitionistic fuzzy sets and application to pattern recognition[J]. Pattern Recognition Letters, 2002, 23: 221-225.
- [27] Liang Z., Shi P. Similarity measures on intuitionistic fuzzy sets[J]. Pattern Recognition Letters, 2003, 24: 2678-2693.
- [28] Szmidt E., Kacprzyk J. Distances between intuitionistic fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2000, 114: 505-518.
- [29] Hung W. L., Yang M. S. Similarity measures of intuitionistic fuzzy sets based on Hausdorff distance[J]. Pattern Recognition Letters, 2004, 25: 1603-1611.
- [30] Xu Z. S. Some similarity measures of intuitionistic fuzzy sets and their applications to multiple attribute decision making[J]. Fuzzy Optimization and Decision Making, 2007, 6: 109-121.
- [31] Ye J. Cosine similarity measures for intuitionistic fuzzy sets and their applications[J]. Mathematical and Computer Modelling, 2011, 53: 91-97.

- [32] 徐泽水. 对方案有偏好的三角模糊数型多属性决策方法研究[J]. 系统工程与电子技术, 2002, 24(8): 9-13.
- [33] Shu M. H., et al. Using intuitionistic fuzzy sets for fault tree analysis on printed circuit board assembly[J]. Micro electronics Reliability, 2006, 46 (12) : 2139-2148.
- [34] Abbasbandy S., Hajjari T. A new approach for ranking of trapezoidal fuzzy numbers[J]. Computers Mathematics with Applications, 2009, 57(3): 413-419.
- [35] 王坚强, 张忠. 基于直觉梯形模糊数的信息不完全确定的多准则决策方法[J]. 控制与决策, 2009, 24(2): 226-230.
- [36] Wang J. Q., Zhang Z. Aggregation operators on intuitionistic trapezoidal fuzzy number and its applications to multi-criteria decision making problem[J]. Journal of Systems Engineering and Electronics, 2009, 20(2): 321-326.
- [37] Liu P. A weighted aggregation operators multi-attribute group decision-making method based on interval-valued trapezoidal fuzzy numbers [J]. Expert Systems with Applications, 2011, 38: 1053-1060.
- [38] Liu P. D. A weighted aggregation operators multi-attribute group decision-making method based on interval-valued trapezoidal fuzzy numbers[J]. Expert Systems with Applications, 2011, 38(1): 1053-1060.
- [39] Nehi H. M., Maleki H. R. Intuitionistic fuzzy numbers and it's applications in fuzzy optimization problem [C]. In Proceedings of the 9th WSEAS international conference on systems, Athens, Greece, 2005, 1-5.
- [40] Ye J. Multicriteria Group Decision-making Method Using Vector Similarity Measures for Trapezoidal Intuitionistic Fuzzy Number [J]. Group Decision Negotiation, 2012, 21: 519 - 530.
- [41] Ye J. Expected value method for intuitionistic trapezoidal fuzzy multicriteria decision-making problems[J]. Expert Systems with Applications, 2011, 38(9): 11730-11734.
- [42] Szmidt E., Kacprzyk J. Using intuitionistic fuzzy sets in group making. Control and Cybernetics[J], 2002, 31: 1017-1053.
- [43] Bellman R., Zadeh L. A. Decision making in a fuzzy environment[J]. Management Science, 1970, 17(4): 141-164.
- [44] Cao Q. W., Wu J. The extended COWG operators and their application to multiple attributive group decision making problems with interval numbers[J]. Applied Mathematical Modelling, 2011, 35(5): 2075-2086.

- [45] Yue Z. L. An extended TOPSIS for determining weights of decision makers with interval numbers[J]. *Knowledge-Based Systems*, 2011, 24(1): 146-153.
- [46] Wang Y. M., Elhag T. M. S. Fuzzy TOPSIS method based on alpha level sets with an application to bridge risk assessment[J]. *Expert Systems with Applications*, 2006, 31(2): 309-319.
- [47] Tang Y. C., Chang C. T. Multicriteria decision-making based on goal programming and fuzzy analytic hierarchy process: An application to capital budgeting problem[J]. *Knowledge-Based Systems*, 2012, 26: 288-293.
- [48] Wei G. W., Wei Y. Model of grey relational analysis for interval multiple attribute decision making with preference information on alternatives[J]. *Chinese Journal of Management Science*, 2008, 16(1): 158-162.
- [49] Kacprzyk J. *Multistage Fuzzy Control: A Model-based Approach to Fuzzy Control and Decision Making*[M]. New York: Wiley, 1997.
- [50] Deschrijver G., Kerre E. E. On the relationship between some extensions of fuzzy set theory[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 2003, 133(2) : 227-235.
- [51] Mondal T. K, Samanta S K. Topology of interval-valued intuitionistic fuzzy sets[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 2001, 119(3): 483-494.
- [52] Liu P. D., Wang T. J. A method for multiple attribute decision making with triangular fuzzy number and partial attribute weight information[J]. *Journal of Information Computiom Science*, 2007, 4(3): 1017-1022.
- [53] Li D. F. A ratio ranking method of triangular intuitionistic fuzzy numbers and its application to MADM problems[J]. *Computers and Mathematics with Applications*, 2010, 60(6): 1557-1570.
- [54] Zhang S. F., Liu S. Y., Zhai R. H. An extended GRA method for MCDM with interval-valued triangular fuzzy assessments and unknown weights[J]. *Computers & Industrial Engineering*, 2011, 61(4): 1336-1341.
- [55] Xu Z. Y., Shang S. C., Qian W. B. et.al. A method for fuzzy risk analysis based on the new similarity of trapezoidal fuzzy numbers[J]. *Expert Systems with Applications*, 2010, 37(3): 1920-1927.
- [56] Yeh C. T. On improving trapezoidal and triangular approximations of fuzzy numbers[J]. *Internation Journal of Approximation Reason*, 2008, 48: 297-313.
- [57] Yeh C. T. Trapezoidal and triangular approximations preserving the expected interval[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 2008, 159: 1345-1353.
- [58] Yeh C. T. Weighted trapezoidal and triangular approximations of fuzzy numbers[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 2009, 160: 3059-3079.

- [59] 郭凯红, 李文立. 权重信息未知情况下的多属性群决策方法及其拓展[J]. 中国管理科学, 2011, 19(4): 94-103.
- [60] Jaccard P. Distribution de la flore alpine dans le Bassin des Drouces et dans quelques regions voisines[J]. Bull de la Société Vaudoise des Sciences Naturelles, 1901, 37: 241-272.
- [61] Dice L. R. Measures of the amount of ecologic association between species[J]. Ecology, 1945, 26: 297-302.
- [62] Salton G., McGill M. J. Introduction to modern information retrieval[M], New York: McGraw-Hill, 1987.
- [63] 徐选华, 李芳. 重大冰雪灾害应急管理评价-以湖南省为例[J]. 灾害学, 2011, 26(2): 130-137.
- [64] 赵黎明, 王康, 邱佩华. 灾害综合研究评估[J]. 系统工程理论与实践, 1997, 17(3): 63-69.
- [65] 金菊良, 张欣莉, 丁晶. 评估洪水灾情等级的投影寻踪模型[J]. 系统工程理论与实践, 2002, 22(2): 140-144.
- [66] 鲁光银, 韩旭里, 朱自强等. 地质灾害综合评估与区化模型[J]. 中南大学学报(自然科学版), 2005, 36(5): 877-881.
- [67] 杨仕升. 一种考虑地域经济差异的自然灾害灾情分级方法及应用[J]. 系统工程理论与实践, 1997, 12: 93-100.
- [68] 张玲, 黄钧, 韩继业. 应对自然灾害的应急资源布局模型与算法[J]. 系统工程理论与实践, 2010, 30(9): 1615-1621.
- [69] Editorial. Methodological foundations of multi-criteria decision making[J]. European Journal of Operational Research, 2004, 158: 267-270.
- [70] 金菊良, 汪明武, 魏一鸣. 基于群体决策的水资源可持续利用评价的理想区间法[J]. 管理工程学报, 2006, 20(2): 78-83.
- [71] 李建勋, 沈冰, 解建仓等. 多属性群体决策的水文预报择优及组合方法[J]. 系统工程理论与实践, 2010, 30(12): 2315-2320.
- [72] 简祯富. 决策分析与管理-全面决策质量提升的架构与方法[M]. 北京: 清华大学出版社, 2007.
- [73] 梁保松, 曹殿立. 模糊数学及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 2007.
- [74] Alexander B. On the number of matrices and a random matrix with prescribed row and column sums and 0-1 entries [J]. Advances in Mathematics, 2010, 224:316-339.

- [75] Teimuraz T. The reduction of binary fuzzy relations and its applications [J]. *Information Sciences*, 2008, 178: 562-572.
- [76] Serge V., Vladimir M. Using fuzzy binary relations for identifying noninferior decision alternatives[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 1988, 25: 21-32.
- [77] Chen X. Research of enterprise management decision support system [J]. *Journal of Central South Institute of Mining and Metallurgy*, 1993, 24: 711-718.
- [78] Soung H., Sang H. C., Jae K. K. An interactive procedure for multiple attribute group decision making with incomplete information :Range-based approach[J]. *European Journal of Operational Research*, 1999, 118: 139-152.
- [79] Esogbue A. O., Theologidu M., Guo K. On the application of fuzzy sets theory to the optimal control problem arising in water resources systems[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 1992, 48: 155-172.
- [80] Carlsson C., Fuller R. Multiple criteria decision making: the case for interdependence[J]. *Computers & Operations Research*, 1995, 22(3): 251-260.
- [81] Cavallaro F. Fuzzy TOPSIS approach for assessing thermal-energy storage in concentrated solar power (CSP) systems[J]. *Applied Energy*, 2010, 87: 496-503.
- [82] Carlsson C., Fuller R. Fuzzy multiple criteria decision making: recent developments[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 1996, 78(2): 139-153.
- [83] Carlsson C., Fuller R. Multiobjective linguistic optimization[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 2000, 115(1): 5-10.
- [84] Chao F., Shanlin Y. An attribute weight based feedback model for multiple attribute group decision analysis problems with group consensus requirements in evidential reasoning context [J]. *European Journal of Operational Research*, 2011, 212: 179-189.
- [85] Chen M., Tzeng G. Combining grey relation and TOPSIS concepts for selecting an expatriate host country[J]. *Mathematical and Computer Modelling*, 2004, 40(13): 1473-14907.
- [86] Jahanshahloo G., Lotfi F., Izadikhah M. Extension of the TOPSIS method for decision-making problems with fuzzy data[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2006, 181(2): 1544-1551.
- [87] 章玲. 基于关联的多属性决策分析理论及其应用研究[D]. 南京: 南京航空航天大学博士学位论文, 2007.
- [88] 徐选华, 陈晓红. 基于矢量空间的群体聚类方法研究[J]. *系统工程与电子技术*, 2005, 27(6): 1034-1037.
- [89] 李荣钧. 模糊多准则决策理论与应用[M]. 北京: 科学出版社, 2002.

- [90] 彭勇行. 管理决策分析[M]. 武汉: 华中理工大学出版社, 1990.
- [91] 丁勇, 梁昌勇, 朱俊红, 陆文星. 群决策中基于二元语义的主客观权重集成方法[J]. 中国管理科学, 2010, 18(5): 165-170.
- [92] Bustince H., Barrenechea E., Pagola M. Restricted equivalence functions[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2006, 157: 2333-2346.
- [93] Bustince H., Barrenechea E., Pagola M. Image thresholding using restricted equivalence functions and maximizing the measures of similarity[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2007, 158: 496-516.
- [94] Bustince H., Barrenechea E., Pagola M. Relationship between restricted dissimilarity functions, restricted equivalence functions and normal E - N functions: Image thresholding invariant[J]. Pattern Recognition Letters, 2008, 29: 525-536.
- [95] Vlachos I. K., Sergiadis G. D. Intuitionistic fuzzy information—application to pattern recognition[J]. Pattern Recognition Letters, 2007, 28: 197-206.
- [96] Szmidt E., Kacprzyk J. A consensus-reaching process under intuitionistic fuzzy preference relations[J]. International Journal of Intelligent Systems, 2003, 18: 837-852.
- [97] Szmidt E., Kacprzyk J. A new concept of a similarity measure for intuitionistic fuzzy sets and its use in group decision making[J]. Lecture Notes in Computer Science (Subseries LNAI), 2005, 3558: 272-282.
- [98] Xu Z. S. Some similarity measures of intuitionistic fuzzy sets and their applications to multiple attribute decision making[J]. Fuzzy Optimization and Decision Making, 2007, 6: 109-121.
- [99] Chen S. M. A new approach to handling fuzzy decision making problems[J]. IEEE Transactions on Systems Man and Cybernetics, 1988, 18: 1012-1016.
- [100] Jae M., Moon J. H. Use of a fuzzy decision-making method in evaluation severe accident management strategies[J]. Annals of Nuclear Energy, 2002, 29: 1597-1606.
- [101] Yager R. R. Fuzzy decision making including unequal objective[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1978, 1: 87-95.
- [102] Yager R. R. On ordered weighted averaging aggregation operators in multi-criteria decision making[J]. IEEE Transaction on Systems Man and Cybernetics, 1988, 18: 183-190.
- [103] Zimmermann H. J. Fuzzy sets, decision making, and expert systems[M]. Boston: Kluwer Academic Publishers, 1987.

- [104] Liu H. W. New similarity measures between intuitionistic fuzzy sets and between elements[J]. *Mathematical and Computer Modelling*, 2005, 42, 61-70.
- [105] Li D. F. The GOWA operator based approach to multiattribute decision making using intuitionistic fuzzy sets[J]. *Mathematical and Computer Modelling*, 2011, 53: 1182-1196.
- [106] Wu J. Z., Zhang Q. Multicriteria decision making method based on intuitionistic fuzzy weighted entropy[J]. *Expert Systems with Applications*, 2011, 38: 916-922.
- [107] Wang J. Q., Li J. J. Multi-criteria fuzzy decision-making method based on cross entropy and score functions[J]. *Expert Systems with Applications*, 2011, 38: 1032-1038.
- [108] Atanassov K., Pasi G., Yager R. Intuitionistic fuzzy interpretations of multi-criteria multi-person and multi-measurement tool decision making[J]. *International Journal of Systems Science*, 2005, 36: 859-868.
- [109] Wang P. Qos-aware web services selection with intuitionistic fuzzy set under consumer's vague perception[J]. *Expert Systems with applications*, 2009, 36: 4460-4466.
- [110] Xu Z. S. Models for multiple attribute decision making with intuitionistic fuzzy information[J]. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge- Based Systems*, 2007, 15: 285-297.
- [111] Xu Z. S., Yager R. R. Dynamic intuitionistic fuzzy multi-attribute decision making[J]. *International Journal of Approximate Reasoning*, 2008, 48: 246-262.
- [112] Li F., Rao Y. Weighted methods of multi-criteria fuzzy decision making based on vague sets[J]. *Computer Science*, 2001, 5: 103-109.
- [113] Zhou Z., Wu Q. Z. Multicriteria fuzzy decision making method based on vague set[J]. *Mini-Micro Systems*, 2005, 26: 1350-1353.
- [114] Zhang T., Lu Y. J., Ma J. J. Discussion on improvement of score function methods based on vague sets for fuzzy multi-criteria decision-making[J]. *Systems Engineering*, 2006, 24: 120-123.
- [115] Chen S. M., Tan J. M. Handling multi-criteria fuzzy decision-making problems based on vague set theory[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 1994, 67: 163-172.
- [116] Hong D. H., Choi C. H. Multi-criteria fuzzy decision-making problems based on vague set theory[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 2000, 114: 103 - 113.

- [117] Yoon K. The propagation of errors in multiple-attribute decision analysis: A practical approach[J]. *Journal of Operational Research Society*, 1989, 40: 681-686.
- [118] Dubois D, Prade H. Operation on fuzzy number[J]. *International Journal of Systems Science*, 1978, 9: 613-626.
- [119] Lee S. H., Pedrycz W., Sohn G. Design of similarity measures for fuzzy sets on the basis of distance measure[J]. *International Journal of Fuzzy Systems*, 2009, 11(2): 67-72.
- [120] Grzegorzewski P. The hamming distance between intuitionistic fuzzy sets [C]. In *Proceedings of the 10th IFSA world congress, Istanbul, Turkey, 2003*, 35-38.
- [121] Vlachos I. K., Sergiadis G. D. Subsethood, entropy and cardinality for interval-valued fuzzy sets[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 2007, 158(12): 1384-1396.
- [122] 徐泽水. 区间直觉模糊信息的集成方法及其在决策中的应用[J]. *控制与决策*, 2007, 22(2): 215-219.
- [123] 徐泽水, 陈剑. 一种基于区间直觉判断矩阵的群决策方法[J]. *系统工程理论与实践*, 2007, 4: 126-133.
- [124] Herrera F., Herrera V. E., Luis M. A fusion approach for managing multi-granularity linguistic term sets in decision making[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 2000, 114: 43-58.
- [125] Herrera F., Matinez L. A 2-tuple fuzzy linguistic representation model for computing with words[J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2000, 8(12): 746-752.
- [126] Herrera F., Matinez L. A model based on linguistic 2-tuples for dealing with multi-granularity hierarchical linguistic contexts in multi-expert decision-making[J]. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics-Part B: Cybernetics*, 2001, 3(2): 227-234.
- [127] Fu G. T. A fuzzy optimization method for multicriteria decision making: An application to reservoir flood control operation[J]. *Expert Systems with Application*, 2008, 34(1): 145-149.
- [128] Wei G. W. FLOWHM operator and its application to multiple attribute group decision making[J]. *Expert Systems with Application*, 2011, 38(4): 2984-2989.

- [129] Wei G. W., Zhao X. F., Lin R. et al. Generalized triangular fuzzy correlated averaging operator and their application to multiple attribute decision making[J]. Applied Mathematical Modelling, 2012, 36(7): 2975-2982.
- [130] Laarhoven V. P. J. M., Pedrycz W. A fuzzy extension of Saaty's priority theory[J]. Fuzzy Sets Systems, 1983, 11(1-3): 229-241.
- [131] 夏勇其, 吴祈宗. 一种混合型多属性决策问题的TOPSIS方法[J]. 2004, 19(6): 630-634.
- [132] Liu W. L., Liu P. D. Hybrid multiple attribute decision making method based on relative approach degree of grey relation projection[J]. African Journal of Business Management, 2010, 4(1): 3716-3724.
- [133] 王秋萍, 张道宏. 模糊环境下群组抉择问题的灰色关联度分析法[J]. 系统工程理论与实践, 2006, 6: 14-21.
- [134] 王建根. 多目标系统模糊优选的理论与模型[J]. 系统工程, 1999, 5(13): 20-22.
- [135] 吴龙军, 陈华平. 模糊优化理论在多目标多阶段决策系统中的应用[J]. 价值工程, 2004, 3:
- [136] 徐泽水. 基于相离度和可能度的偏差最大化多属性决策方法[J]. 控制与决策, 2001, 16: 818-821.
- [137] 赵宜宾, 曾文艺. 基于区间数度量的区间值模糊集合的相似度、模糊度和包含度的关系研究[J]. 工程数学学报, 2010, 27(2): 205-304.
- [138] 兰蓉. 基于直觉模糊集相似度量多属性决策方法[J]. 西安邮电学院学报, 2010, 15(3): 64-67.
- [139] 刘富春. 模糊粗糙集的相似度量与相似性方向[J]. 计算机工程与应用, 2005, 41(35): 35-38.
- [140] 郭强, 郭耀煌, 郭春香. 基于模糊相似度的群决策方案排序[J]. 西南交通大学学报, 2010, 45(4): 307-311.
- [141] Kacprzyk J. A new concept of a similarity measure for intuitionistic fuzzy sets and its use in group decision making[J]. Modeling Decisions for Artificial Intelligence, 2005, 58: 272-282.
- [142] Heilpern S. The expected value of a fuzzy number[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1992, 47: 81-86.
- [143] Ye J. Using an improved measure function of vague sets for multicriteria fuzzy decision making[J]. Expert Systems With Application, 2010, 37(6): 4706-4709.

- [144] Chen Y., Li, B. Dynamic multi-attribute decision making model based on triangular intuitionistic fuzzy numbers[J]. *Scientia Iranica Transactions B: Mechanical Engineering*, 2011, 18 (2): 268-274.
- [145] Atanassov K. *Intuitionistic Fuzzy Sets: Theory and Applications*[M]. Berlin: Springer Physica-Verlag, 1999.
- [146] Yeh C. T. A note on trapezoidal approximation of fuzzy numbers[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 2007, 158: 747-754.
- [147] Ban A. Approximation of fuzzy numbers by trapezoidal fuzzy numbers preserving the expected interval[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 2008, 159: 1327- 1344.
- [148] Bana A., Branda A., Coroianu L. et al. Approximations of fuzzy numbers by trapezoidal fuzzy numbers preserving the ambiguity and value[J]. *Computers and Mathematics with Applications*, 2011, 61: 1379-1401.
- [149] Coroianu L. Best Lipschitz constant of the trapezoidal approximation operator preserving the expected interval[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 2011, 165: 81-97.
- [150] Abbasbandy S., Asady B. The nearest trapezoidal fuzzy number to a fuzzy quantity[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2004, 156: 381-386.
- [151] Allahviranloo T., Adabitabar Firozja M. Note on “Trapezoidal approximation of fuzzy numbers” [J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 2007, 158: 755-756.
- [152] 左春荣, 汪金霞, 付超. 一种梯形模糊偏好的多属性群决策方法[J]. *合肥工业大学学报(自然科学版)*, 2009, 32(3): 374-377.
- [153] 朱灏, 刘鑫, 万琼等. 梯形模糊数语言指标值的工程综合评估[J]. *铁道科学与工程学报*, 2006, 3(4): 84-87.
- [154] 陈业华, 黄元美. 基于梯形模糊数的多维偏好群决策模型[J]. *燕山大学学报*, 2005, 29(6): 535-539.
- [155] Bordogna G., Fedrizzi M., Pasi G. A linguistic modeling of consensus in group decision making based on OWA operators[J]. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics-Part A: Systems and Humans*, 1997, 27(1): 126-132.
- [156] Wang R. C., Chuu S. J. Group decision making using a fuzzy linguistic approach for evaluating the flexibility in a manufacturing system[J]. *European Journal of Operational Research*, 2004, 154: 563-572.
- [157] Xu Z. S. A method based on linguistic aggregation operators for decision making with linguistic preference relations[J]. *Information Sciences*, 2004, 166: 19-30.

- [158] 李清富, 程霞, 刘建民. 基于专家知识的结构性能评估[J]. 建筑科学, 2003, 2: 7-10.
- [159] 赵红云, 赵福祥, 马玉祥. 专家系统效能评估的研究[J]. 系统工程理论与实践, 2001, 7: 26-31.
- [160] 万树平, 董九英. 多属性群决策的直觉梯形模糊数法[J]. 控制与决策, 2010, 25(5): 773-776.
- [161] 王中兴, 谢海斌. 一种基于优势度的直觉梯形模糊数排序方法[J]. 统计与决策, 2011, 24(18): 27-30.
- [162] 樊治平, 于春海, 尤天慧. 一种基于三角模糊数多指标信息的FCM聚类算法[J]. 控制与决策, 2004, 19(12): 1407-1411.
- [163] 张洪美, 徐泽水, 陈琦. 直觉模糊集的聚类方法研究[J]. 控制与决策, 2007, 22(8): 882-888.
- [164] 张兴芳, 孟广武. 基于模糊数模糊集的聚类分析[J]. 北华大学学报, 2000, 1(5): 374-376.
- [165] 于春海, 樊治平. 一种基于群体语言相似矩阵的聚类方法[J]. 系统工程, 2004, 22(7): 76-79.
- [166] 许永平, 王文广, 杨峰等. 考虑属性关联的TOPSIS语言群决策方法[J]. 湖南大学学报(自然科学版), 2010, 37(1): 49-53.
- [167] 高岩, 周德群, 章玲. 基于直觉梯形模糊数的关联变权多属性决策方法[J]. 系统工程, 2011, 29(5): 102-107.
- [168] Ye J. Multicriteria fuzzy decision-making method based on the intuitionistic fuzzy cross entropy[C]. In Proceedings of international conference of intelligent human-machine systems and cybernetics, 2009, 1: 59-61.
- [169] 张市芳, 刘三阳, 翟任何. 直觉梯形模糊数MADM问题的灰色关联分析法[J]. 计算机科学, 2010, 37(11): 214-216.
- [170] Gorzalczany M. B. A method of inference in approximate reasoning based on interval-valued fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1987: 21(1): 1-17.
- [171] Turksen I. B. Interval-valued strict preference with Zadeh triples[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1996, 78(2): 183-195.
- [172] Wang G., Li X. The applications of interval-valued fuzzy numbers and interval-distribution numbers[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1998, 98(3): 331-335.
- [173] Hong D. H., Lee S. Some algebraic properties and a distance measure for interval-valued fuzzy numbers[J]. Information Sciences, 2002, 148(1): 1-10.

- [174] Wang G., Li X. Correlation and information energy of interval-valued fuzzy numbers[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2001, 103(1): 69-175.
- [175] Balezentis T., Zeng S. Z. Group multi-criteria decision making based upon interval-valued fuzzy numbers: An extension of the MULTIMOORA method[J]. Expert Systems with Applications, 2012.
- [176] Yue Z. L. Deriving decision maker' s weights based on distance measure for interval-valued intuitionistic fuzzy group decision making[J]. Expert Systems with Applications, 2011, 38: 11665-11670.
- [177] Ashtiani B., Haghghirad F., Makui A., Montazer G., Extension of fuzzy TOPSIS method based on interval-valued fuzzy sets[J]. Applied Soft Computing, 2009, 9: 457-461.
- [178] Wei S. H., Chen S. M. Fuzzy risk analysis based on interval-valued fuzzy numbers[J]. Expert Systems with Applications, 2009, 36: 2285-2299.
- [179] Liu P. D., Jin F. A multi-attribute group decision-making method based on weighted geometric aggregation operators of interval-valued trapezoidal fuzzy numbers[J]. Applied Mathematical Modelling, 2012, 36: 2498-2509.
- [180] Chen S. H. Fuzzy numbers with maximizing set and minimizing set[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1985, 17(2): 113-129.
- [181] Chen S. M., Chen J. H. Fuzzy risk analysis based on ranking generalized fuzzy numbers with different heights and different spreads[J]. Expert Systems with Applications, 2009, 36(3): 6833-6842.

附录 主要程序

——2.4节决策程序——

——-2011.9.27——

——判断值矩阵V——

```
clc clear B=[0.8452 0.9037 1.0000 1.0000 0.8003 0.9316 0.4410 0.6640 0.4722
0.6227 0.5933 0.6010 0.8613 0.7228 0.7569 0.3666 0.7118 0.9731 1.0000 0 0.3151
0.1609 0.5933 0.0432 0.6810 0.9374 0.6152 0.8043 0.7031 1.0000 0.1113 1.0000 0
0.1963 0.3100 0.5725];
```

```
a=[0.8542 0.346 0.7 0.789 0.1234 0.6534];
```

```
b=0.15;
```

```
c=[0.12 0.24 0.33 0.05 0.18 0.08];
```

```
for i=1:6
```

```
J(i)=(B(i,:)*a')/(norm(B(i,:))^2+norm(a)^2-B(i,:)*a')
```

```
E(i)=2*(B(i,:)*a')/(norm(B(i,:))^2+norm(a)^2)
```

```
C(i)=(B(i,:)*a')/(norm(B(i,:))*norm(a))
```

```
V(i)=b*E(i)+(1-b)*C(i)
```

```
end
```

```
a1=J*c'; a2=E*c'; a3=C*c'; a4=V*c'.
```

——2.4节决策程序——

——-2011.9.27——

——判断值矩阵V——

```
clc
```

```
clear
```

```
B=[0.6206 0.7769 0.4711 0.5180 0.3172 0.4194 0.9055 0.9256 0.6170 0.8522
1.0000 0.7818 1.0000 0.8582 0.7363 0.8865 0.5421 0.8721 0.9786 0.7769 0.8008
0.7156 0.5039 0.4552 0.3351 0.2397 0.2104 0.2844 0.2282 0.2720 0.1273 0.6164
0.4122 0.3690 0.1098 0.4389];
```

```
a=[0.8542 0.346 0.7 0.789 0.1234 0.6534];
```

```
b=0.25;
```

```
c=[0.12 0.24 0.33 0.05 0.18 0.08];
```

```
for i=1:6 J(i)=(B(i,:)*a')/(norm(B(i,:))^2+norm(a)^2-B(i,:)*a');
```

```
E(i)=2*(B(i,:)*a')/(norm(B(i,:))^2+norm(a)^2);
```

```

C(i)=(B(i,:)*a')/(norm(B(i,:))*norm(a));
V(i)=b*E(i)+(1-b)*C(i);
end
b1=J*c'; b2=E*c'; b3=C*c'; b4=V*c'.
——2.4节决策程序——
——-2011.9.27——
——判断值矩阵V——
clc
clear
J=[0.7671 0.7671 0.7661 0.5051 0.7628 0.3512 0.8015 0.7140 0.8530 0.8660
0.5040 0.5700 0.4152 0.6898 0.7892 0.5663 0.8029 0.6191];
E=[0.8682 0.8682 0.8675 0.6712 0.8654 0.5199 0.8898 0.8332 0.9207 0.9282
0.6703 0.7261 0.5867 0.8165 0.8822 0.7231 0.8907 0.7648];
cos=[0.9283 0.8728 0.8812 0.6911 0.8898 0.5355 0.9008 0.8713 0.9542 0.9372
0.9411 0.8141 0.8003 0.8655 0.8843 0.8591 0.8937 0.7762];
Z=[0.9223 0.8723 0.8798 0.6891 0.8874 0.5339 0.8997 0.8675 0.9509 0.9363
0.9140 0.8053 0.7790 0.8606 0.8841 0.8455 0.8934 0.7751];
x=linspace(0,0.1,18);
plot(x,J,'rp-',x,E,'b*-',x,Z,'y>-',x,cos,'g<-');
legend('J-similarity','E-similarity','Z-similarity','C-similarity');
——2.7节决策程序——
——-2011.4.27——
——判断值矩阵Y——
clc
clear
Y=[ 40246 2759 509.740 5 362 13.1 126 124 65.9 7527 98 3.61 15489 1333
504.325 21 7465 466.4 172 128 80.5 10463 142 37 13555 1407 408.828 11 696
94.959 155 140 54.2 13466 252 20.213 17751 1223 357.678 13 882 262.811 176 371
332.4 11542 152 15.029 102804 1227 431.59 10 229 79.692 180 492 218.5 8170 102
15.029 25364 1123 247.528 3 422 201.922 163 161 88.4 9260 94 12.416 26580 1598
326.936 17 446293 85949.594 128 152 206.1 14144 174 12.594 10580 845 190.109
8 407 273.782 132 95 100.2 8859 110 14.511 ];
——Y(i,j,:)=i,j;——
——形成8个标准矩阵Zij——
for i=1:8
for j=1:12

```

```

Yi=Y(i,:);
Z(i,j)=Y(i,j)/norm(Yi);
end
end Z
for i=1:8,j=1:12
yij=Y(i,j,:);
yi=Y(i,:),i=1:8;
Z(i,j)=Y(i,j)/sqrt(Yj);
end
——Z(:,i,j)=Zij——
——4.5节决策程序——
——-2010.6.23——
——判断值矩阵V——
clc
clear V=[ 0.8704 0.9043 1.0000 1.0000 0.8398 0.9346 0.5320 0.6662 0.5492
0.6737 0.6737 0.6182 0.8838 0.7246 0.7924 0.4522 0.7688 0.9743 1.0000 0.0065
0.4149 0.2742 0.6737 0.0845 0.7329 0.9378 0.6713 0.8307 0.7618 1.0000 0.2559
1.0000 0.1458 0.3049 0.4463 0.5910 0.6824 0.7783 0.5482 0.5831 0.4522 0.4445
0.9209 0.9261 0.6729 0.8721 1.0000 0.7912 1.0000 0.8591 0.7748 0.9018 0.6326
0.8777 0.9820 0.7783 0.8299 0.7540 0.6019 0.4788 0.4434 0.2446 0.3255 0.3811
0.3808 0.3035 0.2694 0.6189 0.4979 0.4542 0.2857 0.4632 0.1628 0.3042 0.4236
0.4998 0.3327 0.2700 0.5309 0.4764 0.4226 0.3975 0.5468 0.6502 0.6263 0.6316
0.6713 0.7263 0.8021 0.8153 0.4422 0.0873 0.4979 0.2435 0.2857 0.6502 0.8586
0.8724 0.5482 0.6875 0.6737 0.6517 0.4849 0.8724 0.4290 0.3975 0.5468 0.6502
0.4260 0.5859 0.4012 0.5934 0.6120 0.5294 0.5000 0.4759 0.6459 0.7130 0.3808
0.2972 0.3059 0.5242 0.5995 0.5576 0.7393 0.4819 0.4798 0.3632 0.6431 0.7356
0.3808 0.4741 0.2178 0.1016 0.4979 0.2108 0.1976 0.1695 0.3423 0.9612 0.4979
0.7852 0.7812 0.8317 0.4585 0.2446 0.5771 0.1351 0.4359 0.0432 0.5466 0.4355
0.6975 0.7852 0.8467 0.9579 0.4024 0.2446 0.6024 0.5836 0.3808 0.2146 0.4400
0.4355 0.5492 0.6660 0.6737 0.7211 0.6600 0.6975 0.6751 0.1458 0.5856 0.4803
0.6420 0.3414 0.4979 0.7550 0.3808 0.6502 ];——V(i,:)=Vi;——
——形成30个关系矩阵Ai——
R=0.5;——阈值-
for i=1:30
vi=V(i,:);
for j=1:5
for k=1:5

```

```

if log(vi(j)+vi(k))>=R —满足关系R—
—A为三维矩阵, 第三维i标记为是由Vi形成的关系矩阵Ai—
A(j,k,i)=1;
else
A(j,k,i)=0;
end
end
end
end —A(:, :, i)=Ai—
——对30个关系矩阵Ai进行分类——
k=0; —记类器—
r=input('请输入分类阈值r='); —分类阈值—
a=zeros(30,30); —标记每一类的成员序号—
N=linspace(1,30,30); —临时矩阵T有30个关系矩阵—
t=0;
while (sum(N);0&&k<30) —临时矩阵个数为0时结束循环—
for i=1:length(N)
if i==1
C=A(:, :, N(i)); —初始化集合C—
k=k+1; —记类器增加1—
a(k,N(i))=N(i);
N(i)=0; 临时矩阵少一个,删除相应的标记—
else if norm(A(:, :, N(i))+C,2)/(norm(A(:, :, N(i)),inf)+norm(C,inf))>=r;
a(k,N(i))=N(i);
C=max(C,A(:, :, N(i))); —添加到集合C的矩阵作线性组合—
N(i)=0; 临时矩阵少一个,删除相应的标记—
else
continue end
end
L=N>0;
is logical(L);
N=N(L);
end
——显示结果——
for i=1:30

```



```

if sum(a(i,:)>0)
t=t+1;
s=a(i,:);
L=s>0;
is logical(L);
s=s(L);
jieguo=strcat('第',num2str(t),'类的结果是: ',num2str(s));
disp (jieguo)
end
end
jieguo=strcat('分类阈值为',num2str(r),'; 共分为',num2str(t),'类。');
disp (jieguo)
——5.3节决策程序——
——-2011.11.15——
——判断值矩阵A——
clc
clear A=[ 0.3 0.3 0.3 0.4 1 0 0.5 0.5 0.4 0.2 0.4 0.2];
B=[ 0.4 0.4 0.4 0.3 0 0 0 0 0.5 0.3 0.5 0.2];
b=0.8;
E(1)=2*(A(1,:)*B(1,:)'/(norm(A(1,:))^2 + norm(B(1,:))^2);
C(1)=(A(1,:)*B(1,:)'/(norm(A(1,:)) * norm(B(1,:))^2);
V(1)=b*E(1)+(1-b)*C(1);
E(2)=2*(A(2,:)*B(2,:)'/(norm(A(2,:))^2 + norm(B(2,:))^2);
C(2)=(A(2,:)*B(2,:)'/(norm(A(2,:)) * norm(B(2,:))^2);
V(2)=b*E(2)+(1-b)*C(2);
E(3)=2*(A(3,:)*B(3,:)'/(norm(A(3,:))^2 + norm(B(3,:))^2);
C(3)=(A(3,:)*B(3,:)'/(norm(A(3,:)) * norm(B(3,:))^2);
V(3)=b*E(3)+(1-b)*C(3);
E(4)=2*(A(4,:)*B(4,:)'/(norm(A(4,:))^2 + norm(B(4,:))^2);
C(4)=(A(4,:)*B(4,:)'/(norm(A(4,:)) * norm(B(4,:))^2);
V(4)=b*E(4)+(1-b)*C(4);
E(5)=2*(A(5,:)*B(5,:)'/(norm(A(5,:))^2 + norm(B(5,:))^2);
C(5)=(A(5,:)*B(5,:)'/(norm(A(5,:)) * norm(B(5,:))^2);
V(5)=b*E(5)+(1-b)*C(5);
E(6)=2*(A(6,:)*B(6,:)'/(norm(A(6,:))^2 + norm(B(6,:))^2)

```

$$C(6)=(A(6,:)*B(6,:))/(norm(A(6,:)) * norm(B(6,:))^2)$$

$$V(6)=b*E(6)+(1-b)*C(6)。$$

——5.4节决策程序——

——2012.3.19——

——判断值矩阵A——

clc

clear

$$A=[0.6 0.4 0.55 0.35 0.4 0.2 0.52 0.45];$$

$$B=[0.55 0.35 0.65 0.3 0.55 0.04 0.45 0.15];$$

$$M=[0.6 0.3 0.68 0.3 0.72 0.25 0.65 0.12];$$

$$P=[0.6 0.3 0.68 0.3 0.72 0.04 0.65 0.12];$$

$$Q=[0.55 0.40 0.55 0.3 0.4 0.25 0.45 0.45];$$

$$E1=2*(A(1,:)*P(1,:))/(norm(A(1,:))^2 + norm(P(1,:))^2);$$

$$E2=2*(A(2,:)*P(2,:))/(norm(A(2,:))^2 + norm(P(2,:))^2);$$

$$E3=2*(A(3,:)*P(3,:))/(norm(A(3,:))^2 + norm(P(3,:))^2);$$

$$E4=2*(A(4,:)*P(4,:))/(norm(A(4,:))^2 + norm(P(4,:))^2);$$

$$PE(1)=1/4*(E1+E2+E3+E4);$$

$$E1=2*(B(1,:)*P(1,:))/(norm(B(1,:))^2 + norm(P(1,:))^2);$$

$$E2=2*(B(2,:)*P(2,:))/(norm(B(2,:))^2 + norm(P(2,:))^2);$$

$$E3=2*(B(3,:)*P(3,:))/(norm(B(3,:))^2 + norm(P(3,:))^2);$$

$$E4=2*(B(4,:)*P(4,:))/(norm(B(4,:))^2 + norm(P(4,:))^2);$$

$$PE(2)=1/4*(E1+E2+E3+E4);$$

$$E1=2*(M(1,:)*P(1,:))/(norm(M(1,:))^2 + norm(P(1,:))^2);$$

$$E2=2*(M(2,:)*P(2,:))/(norm(M(2,:))^2 + norm(P(2,:))^2);$$

$$E3=2*(M(3,:)*P(3,:))/(norm(M(3,:))^2 + norm(P(3,:))^2);$$

$$E4=2*(M(4,:)*P(4,:))/(norm(M(4,:))^2 + norm(P(4,:))^2);$$

$$PE(3)=1/4*(E1+E2+E3+E4)$$

$$E1=2*(A(1,:)*Q(1,:))/(norm(A(1,:))^2 + norm(Q(1,:))^2);$$

$$E2=2*(A(2,:)*Q(2,:))/(norm(A(2,:))^2 + norm(Q(2,:))^2);$$

$$E3=2*(A(3,:)*Q(3,:))/(norm(A(3,:))^2 + norm(Q(3,:))^2);$$

$$E4=2*(A(4,:)*Q(4,:))/(norm(A(4,:))^2 + norm(Q(4,:))^2);$$

$$NE(1)=1/4*(E1+E2+E3+E4);$$

$$E1=2*(B(1,:)*Q(1,:))/(norm(B(1,:))^2 + norm(Q(1,:))^2);$$

$$E2=2*(B(2,:)*Q(2,:))/(norm(B(2,:))^2 + norm(Q(2,:))^2);$$

$$E3=2*(B(3,:)*Q(3,:))/(norm(B(3,:))^2 + norm(Q(3,:))^2);$$

```

E4=2*(B(4,:)*Q(4,:))/(norm(B(4,:))^2 + norm(Q(4,:))^2);
NE(2)=1/4*(E1+E2+E3+E4);
E1=2*(M(1,:)*Q(1,:))/(norm(M(1,:))^2 + norm(Q(1,:))^2);
E2=2*(M(2,:)*Q(2,:))/(norm(M(2,:))^2 + norm(Q(2,:))^2);
E3=2*(M(3,:)*Q(3,:))/(norm(M(3,:))^2 + norm(Q(3,:))^2);
E4=2*(M(4,:)*Q(4,:))/(norm(M(4,:))^2 + norm(Q(4,:))^2);
NE(3)=1/4*(E1+E2+E3+E4)
de(1)=PE(1)/NE(1);
de(2)=PE(2)/NE(2);
de(3)=PE(3)/NE(3)

```

——5.5节决策程序——

——-2012.3.25——

——判断值矩阵A——

clc

clear

```

A= [0.0539 0.0911 0.2953 0.3302 0.0855 0.4693 0.1357 0.0504 0.2786 0.3862
0.0716 0.2797 0.4161 0.3087 0.0611 0.3356 0.3145 0.0508 0.4171 0.0078 0.3921
0.3528 0.1800 0.2271 0.2428 0.4472 0.2585 0.2783 0.1010 0.2269 0.4984 0.2768
0.1716 0.4680 0.3308 0.2585 0.3469 0.4726 0.4181 0.3657 0.4176 0.1612 0.3601
0.1734 0.4097 0.2659 0.4431 0.4656 0.3783 0.2070 0.0355 0.4439 0.4871 0.2854
0.2000 0.4159 0.8147 0.1270 0.6324 0.2785 0.7690 0.0357 0.7060 0.2769 0.0971
0.6948 0.3922 0.1712 0.0344 0.3816 0.1869 0.4456 0.7094 0.2760 0.6551 0.1190
0.6797 0.1626 0.4984 0.3404 0.2238 0.2551 0.5472 0.1493 0.6160 0.1386 0.2575
0.2543 0.2435 0.3500 0.2511 0.4733 0.3804 0.5678 0.0119 0.3371 0.1622 0.7943
0.3112 0.5285 0.1656 0.6020 0.2630 0.6541 0.4505 0.0838 0.1524 0.8258 0.0782
0.4427 0.0067 0.9619 0.0046 0.7749 0.0844 0.3998 0.1818 0.2638 0.1455 0.1361
0.5499 0.1450 0.3510 0.5132 0.4018 0.0760 0.2399 0.1233 0.1839 0.2400 0.4173
0.0497 0.4909 0.4893 0.3692 0.1112 0.2417 0.4039 0.0965 0.1320 0.5752 0.0598
0.2348 0.3532 0.8212 0.0154 0.0430 0.7317 0.6477 0.3509 0.5470 0.2963 0.7447
0.1890 0.6868 0.1835 0.3685 0.6256 0.7802 0.0811 0.9294 0.0057 0.4868 0.4359
0.4468 0.3063 0.5085 0.4108 0.8176 0.0948 0.6443 0.3186 0.3507 0.6390 0.2077
0.3012 0.4709 0.2305 0.7443 0.1948 0.2259 0.1707 0.2277 0.4357 0.0311 0.9234
0.4302 0.1848 0.4389 0.1111 0.2581 0.4087 0.5949 0.2622 0.2217 0.1174 0.2967
0.3188 0.4242 0.5079 0.9294 0.0057 0.7443 0.0078 0.7690 0.0598 0.7802 0.0504
0.0046 0.9234 0.0430 0.8358 0.0782 0.6390 0.0119 0.9616 ];

```

for i=1:27

b(i)=A(i,1)-A(i,2);

```

c(i)=A(i,3)-A(i,4);
d(i)=A(i,5)-A(i,6);
e(i)=A(i,7)-A(i,8);
end
Y=[b',c',d',e']';
Y1=min(Y,[],1);
Y2=max(Y,[],1);
for i=1:4
for j=1:27
Z(i,j)=[Y(i,j)-Y1(j)]/[Y2(j)-Y1(j)];
end
end
z=Z';
w=[0.1 0.3 0.2 0.4 0.1];
A1=[z(1,:);z(2,:);z(3,:);z(4,:);z(5,:)];
A2=[z(6,:);z(7,:);z(8,:);z(9,:);z(10,:)];
A3=[z(11,:);z(12,:);z(13,:);z(14,:);z(15,:)];
A4=[z(16,:);z(17,:);z(18,:);z(19,:);z(20,:)];
A5=[z(21,:);z(22,:);z(23,:);z(24,:);z(25,:)];
s1=w*A1; s2=w*A2; s3=w*A3; s4=w*A4; s5=w*A5;
——5.5节决策程序——
——-2012.3.20——
——判断值矩阵A——
clc
clear
A =[0.7389 0.7438 0 1.0000 0.4370 0.1739 1.0000 0 0.6810 1.0000 0.1893 0
0 0.4333 0.1843 1.0000 0 1.0000 0.4630 0.9460 1.0000 0.7501 0.5963 0 0.9502 0
1.0000 0.3155 0.8798 0 1.0000 0.1982 0 1.0000 0.3060 0.4141 0.7284 1.0000 0.9497
0 0 0.8437 1.0000 0.0678 1.0000 0.4710 0.6301 0 0 1.0000 0.4718 0.5810 1.0000
0.2132 0.4469 0 0 0.5834 0.8828 1.0000 1.0000 0 0.8605 0.4916 0 1.0000 0.1362
0.7413 0 0.1870 1.0000 0.0646 1.0000 0 0.6594 0.6286 0.8500 0.7952 0 1.0000
1.0000 0 0.1027 0.0536 1.0000 0.6073 0 0.1927 0.5919 1.0000 0.3475 0 0 0.9325
1.0000 0.6079 1.0000 0.4515 0.1479 0 ];
P=[1.0000 0.1273 0 0.0960];
N=[ 0.0795 0.4034 1.0000 0];
for i=1:25

```

```

SP(i)=A(i,:)*P'/(norm(A(i,:))+norm(P));
SN(i)=A(i,:)*N'/(norm(A(i,:))+norm(N));
R(i)=1/2*(SP(i)+SN(i));
end
x=linspace(0,0.1,25); plot(x,SP,'rp-',x,SN,'b*-',x,R,'g>-');
legend('Positive-similarity','Negative-similarity','Reletive-similarity');
——6.2节决策程序——
——-2012.5.12——
——判断值矩阵V——
clc
clear
A=[0.1300 0.1700 0.2200 0.3600 0.4600 0.5600 0.3900 0.5400 0.6900 0.4200
0.5000 0.6000 0.5200 0.6000 0.6000 ];
B=[0.2200 0.2700 0.3200 0.5400 0.6400 0.7400 0.6000 0.7500 0.9000 0.4400
0.5400 0.6200 0.1800 0.2600 0.2600];
C=[0.1800 0.2300 0.2700 0.2800 0.3600 0.4600 0.6900 0.8400 0.9900 0.1600
0.2400 0.3400 0.4800 0.5800 0.5800];
D=[0.2100 0.2600 0.3100 0.3400 0.4200 0.5200 0.5700 0.7200 0.8700 0.2800
0.3800 0.4800 0.4600 0.5600 0.5600];
P=[0.40 0.50 0.60 0.70 0.80 0.90 0.80 0.90 1.00 0.70 0.80 0.90 0.50 0.60 0.70];
for i=1:5
J1(i)=A(i,:)*P(i,:)'/(norm(A(i,:))^2 + norm(P(i,:))^2-A(i,:)*P(i,:));
end
for i=1:5
J2(i)=B(i,:)*P(i,:)'/(norm(B(i,:))^2 + norm(P(i,:))^2-B(i,:)*P(i,:));
end for i=1:5
J3(i)=C(i,:)*P(i,:)'/(norm(C(i,:))^2 + norm(P(i,:))^2-C(i,:)*P(i,:));
end
for i=1:5
J4(i)=D(i,:)*P(i,:)'/(norm(D(i,:))^2 + norm(P(i,:))^2-D(i,:)*P(i,:));
end
for i=1:5
E1(i)=2*A(i,:)*P(i,:)'/(norm(A(i,:))^2 + norm(P(i,:))^2);
end
for i=1:5

```

```

E2(i)=2*B(i,:)*P(i,:)'/(norm(B(i,:))^2 + norm(P(i,:))^2);
end
for i=1:5
E3(i)=2*C(i,:)*P(i,:)'/(norm(C(i,:))^2 + norm(P(i,:))^2);
end
for i=1:5
E4(i)=2*D(i,:)*P(i,:)'/(norm(D(i,:))^2 + norm(P(i,:))^2);
end
for i=1:5
C1(i)=A(i,:)*P(i,:)'/(norm(A(i,:))*norm(P(i,:)));
end
for i=1:5
C2(i)=B(i,:)*P(i,:)'/(norm(B(i,:))*norm(P(i,:)));
end
for i=1:5 C3(i)=C(i,:)*P(i,:)'/(norm(C(i,:))*norm(P(i,:)));
end
for i=1:5
C4(i)=D(i,:)*P(i,:)'/(norm(D(i,:))*norm(P(i,:)));
end
J=[J1; J2;J3;J4]';
E=[E1;E2;E3;E4]';
C=[C1;C2;C3;C4]';
W=[0.1481,0.2222,0.0741,0.3580,0.1975];
j=W*J; e=W*E; c=W*C.
——6.3节决策程序——
——-2012.7.30——
——-偏好矩阵B——
clc
clear
B =[0.2400 0.4400 0.3400 0.4200 0.3200 0.5400 0.4200 0.5200 0.4200 0.6400
0.5200 0.6200 0.1600 0.3600 0.2600 0.3400 0.3600 0.6000 0.4400 0.5600 0.5200
0.7400 0.6000 0.7200 0.3600 0.5200 0.2800 0.3400 0.4600 0.6200 0.3600 0.4200
0.5600 0.7200 0.4400 0.5200 0.2800 0.4600 0.2000 0.2600 0.4800 0.6800 0.3800
0.4600 0.6600 0.8000 0.5400 0.6200 0.2400 0.3600 0.4200 0.3800 0.3200 0.4600
0.5200 0.4800 0.4200 0.5600 0.6200 0.5800 0.1600 0.2600 0.3400 0.2800 0.3600

```

```
0.5000 0.5800 0.5200 0.5200 0.6600 0.7200 0.6800 0.4000 0.4400 0.1600 0.2200
0.4800 0.5000 0.2000 0.3000 0.5800 0.6000 0.2800 0.4000 0.3400 0.4000 0.1200
0.1400 0.5600 0.5600 0.2400 0.3400 0.6600 0.6600 0.3800 0.5000 0.5200 0.1800
0.4600 0.4400 0.5800 0.2200 0.5200 0.5400 0.6800 0.3000 0.6200 0.6400 0.4800
0.1600 0.4200 0.3800 0.6800 0.2800 0.6000 0.5800 0.7600 0.3800 0.7000 0.7200];
```

```
A=[0.0 0.0 0.1 0.0 0.1 0.2 0.1 0.2 0.3 0.0 0.2 0.4 0.2 0.3 0.4 0.1 0.3 0.5 0.1 0.2
0.3 0.0 0.2 0.4 0.0 0.0 0.1 0.0 0.1 0.2 ];
```

```
C=A';
```

```
a1=abs(B(:,1)-C)'; a2=abs(B(:,2)-C)';
```

```
a3=abs(B(:,3)-C)'; a4=abs(B(:,4)-C)';
```

```
b1=[0.2400 0.3200 0.3200 0.1600 0.2600 0.3200 0.2600 0.2600 0.2600 0.2800
0.2800 0.2600 0.0400 0.0200 0.0200 0.0600 0.0600 0.0200 0.3000 0.2800 0.2800
0.3400 0.3600 0.2600 0.5200 0.5800 0.5800 0.4800 0.5800 0.5600];
```

```
b2=[0.4400 0.5400 0.5400 0.3600 0.5000 0.5400 0.4200 0.4200 0.4200 0.4600
0.4800 0.4000 0.1600 0.1600 0.1600 0.1600 0.2000 0.1600 0.3400 0.3000 0.3000
0.4000 0.3600 0.2600 0.1800 0.2200 0.2000 0.1600 0.1800 0.1800];
```

```
b3=[0.3400 0.4200 0.4200 0.2600 0.3400 0.4000 0.1800 0.1600 0.1400 0.2000
0.1800 0.1400 0.2200 0.2200 0.2200 0.2400 0.2800 0.2200 0.0600 0 0.0200 0.1200
0.0400 0.0200 0.4600 0.5200 0.5200 0.4200 0.5000 0.5000];
```

```
b4=[0.4200 0.5200 0.5200 0.3400 0.4600 0.5200 0.2400 0.2200 0.2200 0.2600
0.2600 0.2200 0.1800 0.1800 0.1800 0.1800 0.2200 0.1800 0.1200 0.1000 0.1000
0.1400 0.1400 0.1000 0.4400 0.5400 0.5400 0.3800 0.4800 0.5200];
```

```
for i=1:5
```

```
for j=1:6
```

```
E(i,j)=(b1(i,j))^2;
```

```
F(i,j)=(b2(i,j))^2;
```

```
G(i,j)=(b3(i,j))^2;
```

```
H(i,j)=(b4(i,j))^2;
```

```
end
```

```
end
```

```
E =[0.0576 0.1024 0.1024 0.0256 0.0676 0.1024 0.0676 0.0676 0.0676 0.0784
0.0784 0.0676 0.0016 0.0004 0.0004 0.0036 0.0036 0.0004 0.0900 0.0784 0.0784
0.1156 0.1296 0.0676 0.2704 0.3364 0.3364 0.2304 0.3364 0.3136];
```

```
F =[0.1936 0.2916 0.2916 0.1296 0.2500 0.2916 0.1764 0.1764 0.1764 0.2116
0.2304 0.1600 0.0256 0.0256 0.0256 0.0256 0.0400 0.0256 0.1156 0.0900 0.0900
0.1600 0.1296 0.0676 0.0324 0.0484 0.0400 0.0256 0.0324 0.0324];
```

```
G = [0.1156 0.1764 0.1764 0.0676 0.1156 0.1600 0.0324 0.0256 0.0196 0.0400
0.0324 0.0196 0.0484 0.0484 0.0484 0.0576 0.0784 0.0484 0.0036 0 0.0004 0.0144
0.0016 0.0004 0.2116 0.2704 0.2704 0.1764 0.2500 0.2500];
```

```
H = [ 0.1764 0.2704 0.2704 0.1156 0.2116 0.2704 0.0576 0.0484 0.0484 0.0676
0.0676 0.0484 0.0324 0.0324 0.0324 0.0324 0.0484 0.0324 0.0144 0.0100 0.0100
0.0196 0.0196 0.0100 0.1936 0.2916 0.2916 0.1444 0.2304 0.2704];
```

```
e1=(E(:, 1)+E(:,2)+E(:,3)+E(:,4)+E(:, 5)+E(:,6)) ;
```

```
e2=(F(:, 1)+F(:,2)+F(:,3)+F(:,4)+F(:, 5)+F(:,6));
```

```
e3=(G(:, 1)+G(:,2)+G(:,3)+G(:,4)+G(:, 5)+G(:,6)) ;
```

```
e4=(H(:, 1)+H(:,2)+H(:,3)+H(:,4)+H(:, 5)+H(:,6)) ;
```

```
f1=sqrt(e1(:,1)); f2=sqrt(e2(:,1));
```

```
f3=sqrt(e3(:,1)); f4=sqrt(e4(:,1));
```

```
a=[f1,f2,f3,f4];
```

```
w=[0.2315 0.0741 0.2315 0.3519 0.1111];
```

```
O=w*a;
```

——7.1节决策程序——

——-2012.4.15——

——偏好矩阵D——

```
clc
```

```
clear
```

```
D = [0.0881 0.0991 0.1321 0.1651 0.1321 0.1651 0.1982 0.2312 0.2037 0.2312
0.2642 0.2973 0.1321 0.1651 0.1982 0.2312 0.1522 0.1776 0.2030 0.2283 0.1395
0.1522 0.1776 0.1987 0.1268 0.1480 0.1734 0.1987 0.1268 0.1438 0.1691 0.1945
0.0656 0.0805 0.0983 0.1162 0.0954 0.1073 0.1252 0.1430 0.1043 0.1132 0.1311
0.1460 0.0298 0.0447 0.0626 0.0805 0.0672 0.0830 0.1067 0.1305 0.0870 0.1028
0.1265 0.1463 0.0237 0.0395 0.0633 0.0870 0.1305 0.1502 0.1739 0.1937];
```

```
a1=max(D(1,:),D(2,:)); a2=max(D(3,:),D(4,:)); a=max(a1,a2);
```

```
b1=min(D(1,:),D(2,:)); b2=min(D(3,:),D(4,:)); b=min(b1,b2);
```

```
c1=abs(D(1,:)-a); c2=abs(D(2,:)-a);
```

```
c3=abs(D(3,:)-a); c4=abs(D(4,:)-a);
```

```
C=[c1;c2;c3;c4];
```

```
for i=1:4
```

```
for j=1:16
```

```
E(i,j)=(C(i,j)2);
```

```
end
```

```
end
```



```

e1=(E(:, 1)+E(:,2)+E(:,3)+E(:,4));
e2=(E(:, 5)+E(:,6)+E(:,7)+E(:,8));
e3=(E(:, 9)+E(:,10)+E(:,11)+E(:,12));
e4=(E(:, 13)+E(:,14)+E(:,15)+E(:,16));
f1=sqrt(e1(:,1)); f2=sqrt(e2(:,1));
f3=sqrt(e3(:,1)); f4=sqrt(e4(:,1));
F=[f1, f2, f3, f4];
g=sum(F') G=1/4*sum(F');
h1=abs(D(1,:)-b); h2=abs(D(2,:)-b);
h3=abs(D(3,:)-b); h4=abs(D(4,:)-b);
H=[h1;h2;h3;h4];
for i=1:4
for j=1:16
K(i,j)=(H(i,j))^2;
end
end
k1=(K(:, 1)+K(:,2)+K(:,3)+K(:,4));
k2=(K(:, 5)+K(:,6)+K(:,7)+K(:,8));
k3=(K(:,9)+K(:,10)+K(:,11)+K(:,12));
k4=(K(:, 13)+K(:,14)+K(:,15)+K(:,16));
p1=sqrt(k1(:,1)); p2=sqrt(k2(:,1));
p3=sqrt(k3(:,1)); p4=sqrt(k4(:,1));
P=[p1, p2, p3, p4];
n=sum(P') N=1/4*sum(P');
l=n+g.
——7.2节决策程序——
——-2012.3.8——
——判断值矩阵E——
clc
clear
E1=[0.075,0.450,0.650,0.925]; E2=[0.150,0.250, 0.450,1.000];
E3=[0.450,0.450,0.250,0.250]; E4=[0.450,0.250,0.075,0.650];
E5=[0.450,0.650,0.250,0.075]; E6=[0.925,0.075,0.450,0.250];
E7=[0.850,0.150,0.250,0.925]; E8=[0.650,0.250,0.450,0.075];
E9=[0.250,0.075,0.250,0.000]; P=[0.075,0.925,0.850,0.150];

```

```

N=[1.000,0.150,0.250,0.925]; a=0.5;
AP1=a*[E1*P'/(norm(E1)+norm(P)))+(1-a)*[E1*P'/(norm(E1)*norm(P))];
AP2=a*[E2*P'/(norm(E2)+norm(P)))+(1-a)*[E2*P'/(norm(E2)*norm(P))];
AP3=a*[E3*P'/(norm(E3)+norm(P)))+(1-a)*[E3*P'/(norm(E3)*norm(P))];
AP4=a*[E4*P'/(norm(E4)+norm(P)))+(1-a)*[E4*P'/(norm(E4)*norm(P))];
AP5=a*[E5*P'/(norm(E5)+norm(P)))+(1-a)*[E5*P'/(norm(E5)*norm(P))];
AP6=a*[E6*P'/(norm(E6)+norm(P)))+(1-a)*[E6*P'/(norm(E6)*norm(P))];
AP7=a*[E7*P'/(norm(E7)+norm(P)))+(1-a)*[E7*P'/(norm(E7)*norm(P))];
AP8=a*[E8*P'/(norm(E8)+norm(P)))+(1-a)*[E8*P'/(norm(E8)*norm(P))];
AP9=a*[E9*P'/(norm(E9)+norm(P)))+(1-a)*[E9*P'/(norm(E9)*norm(P))];
AN1=a*[E1*N'/(norm(E1)+norm(N)))+(1-a)*[E1*N'/(norm(E1)*norm(N))];
AN2=a*[E2*N'/(norm(E2)+norm(N)))+(1-a)*[E2*N'/(norm(E2)*norm(N))];
AN3=a*[E3*N'/(norm(E3)+norm(N)))+(1-a)*[E3*N'/(norm(E3)*norm(N))];
AN4=a*[E4*N'/(norm(E4)+norm(N)))+(1-a)*[E4*N'/(norm(E4)*norm(N))];
AN5=a*[E5*N'/(norm(E5)+norm(N)))+(1-a)*[E5*N'/(norm(E5)*norm(N))];
AN6=a*[E6*N'/(norm(E6)+norm(N)))+(1-a)*[E6*N'/(norm(E6)*norm(N))];
AN7=a*[E7*N'/(norm(E7)+norm(N)))+(1-a)*[E7*N'/(norm(E7)*norm(N))];
AN8=a*[E8*N'/(norm(E8)+norm(N)))+(1-a)*[E8*N'/(norm(E8)*norm(N))];
AN9=a*[E9*N'/(norm(E9)+norm(N)))+(1-a)*[E9*N'/(norm(E9)*norm(N))];
d1=AP1/AN1; d2=AP2/AN2; d3=AP3/AN3;
d4=AP4/AN4; d5=AP5/AN5; d6=AP6/AN6;
d7=AP7/AN7; d8=AP8/AN8; d9=AP9/AN9。

```

——7.3节决策程序——

——-2011.9.22——

——判断值矩阵V——

clc

clear

```

V=[ 0.075 0.450 0.650 0.925 0.150 0.250 0.450 1.000 0.450 0.450 0.250 0.250
0.450 0.250 0.075 0.650 0.450 0.650 0.250 0.075 0.925 0.075 0.450 0.250 0.850 0.150
0.250 0.925 0.650 0.250 0.450 0.075 0.250 0.075 0.250 0.000 0.650 0.250 0.650 0.850
0.450 0.650 0.150 0.450 0.850 1.000 0.450 0.925 0.450 0.650 0.450 0.075 0.150 0.450
0.650 0.925 0.850 0.650 0.250 0.150 0.650 0.850 0.450 1.000 0.650 0.850 0.450 0.850
0.850 0.650 0.450 0.250 0.150 0.850 0.450 0.250 0.650 0.850 0.450 0.650 0.850 0.650
0.450 0.150 0.650 0.450 0.650 0.450 0.150 0.250 0.650 0.925 0.450 0.650 0.450 0.250
0.250 0.150 0.850 0.650 0.150 0.650 0.250 0.000 0.925 0.450 0.650 1.000 0.150 0.650
0.450 0.075 0.450 0.450 0.250 0.075 0.650 0.650 0.450 0.250 0.450 0.250 0.650 0.450

```

```
0.250 0.250 0.650 0.850 0.150 0.650 0.250 0.250 0.850 0.850 0.250 0.250 0.150 0.650
0.075 0.650 0.450 0.850 0.450 0.450];
```

```
a1=V(1,:)+V(2,:)+V(3,:)+V(4,:)+V(5,:)+V(8,:)+V(9,:)+V(11,:);
```

```
a1=a1/norm(a1);
```

```
a2=V(6,:)+V(12,:)+V(7,:);
```

```
a2=a2/norm(a2);
```

```
a3=V(10,:)/norm(V(10,:)); A=8/12*a1+3/12*a2+1/12*a3;
```

```
b1=V(13,:)+V(14,:)+V(22,:)+V(24,:)+V(23,:);
```

```
b1=b1/norm(b1);
```

```
b2=V(15,:)+V(16,:)+V(17,:)+V(18,:)+V(19,:)+V(20,:)+V(21,:);
```

```
b2=b2/norm(b2);
```

```
B=5/12*b1+7/12*b2;
```

```
c1=V(25,:)/norm(V(25,:))
```

```
c2=V(26,:)+V(28,:)+V(29,:)+V(30,:)+V(31,:)+V(32,:)+V(33,:)+V(35,:);
```

```
c2=c2/norm(c2);
```

```
c3=V(27,:)/norm(V(27,:));
```

```
c4=V(34,:)+V(36,:);
```

```
c4=c4/norm(c4);
```

```
C=1/12*c1+8/12*c2+1/12*c3+2/12*c4;
```

```
D=[A;B;C]';
```

```
W=[0.2430,0.3178,0.0935,0.3458];
```

```
O=W*D.
```

```
——7.4节决策程序——
```

```
——-2012.9.15——
```

```
——判断值矩阵V——
```

```
clc
```

```
clear A1=[0.00 0.00 0.02 0.07 0.00 0.00 0.02 0.07 0.32 0.41 0.58 0.65 0.32 0.41
0.58 0.65 0.58 0.63 0.80 0.86 0.58 0.63 0.80 0.86 0.93 0.98 1.00 1.00 0.93 0.98 1.00
1.00 0.04 0.10 0.18 0.23 0.04 0.10 0.18 0.23 0.17 0.22 0.36 0.42 0.17 0.22 0.36 0.42
0.32 0.41 0.58 0.65 0.32 0.41 0.58 0.65 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 0.32
0.41 0.58 0.65 0.32 0.41 0.58 0.65 0.32 0.41 0.58 0.65 0.32 0.41 0.58 0.65 0.17 0.22
0.36 0.42 0.17 0.22 0.36 0.42 0.17 0.22 0.36 0.42 0.17 0.22 0.36 0.42 0.32 0.41 0.58
0.65 0.32 0.41 0.58 0.65 0.04 0.10 0.18 0.23 0.04 0.10 0.18 0.23 0.00 0.00 0.02 0.07
0.00 0.00 0.02 0.07 0.58 0.63 0.80 0.86 0.58 0.63 0.80 0.86 0.32 0.41 0.58 0.65 0.32
0.41 0.58 0.65 0.58 0.63 0.80 0.86 0.58 0.63 0.80 0.86 0.17 0.22 0.36 0.42 0.17 0.22
0.36 0.42 0.00 0.00 0.02 0.07 0.00 0.00 0.02 0.07 0.93 0.98 1.00 1.00 0.93 0.98 1.00
```



```

0.98 1.00 1.00 0.93 0.98 1.00 1.00 0.00 0.00 0.02 0.07 0.00 0.00 0.02 0.07 0.32 0.41
0.58 0.65 0.32 0.41 0.58 0.65 0.58 0.63 0.80 0.86 0.58 0.63 0.80 0.86 0.58 0.63 0.80
0.86 0.58 0.63 0.80 0.86 0.58 0.63 0.80 0.86 0.58 0.63 0.80 0.86 0.17 0.22 0.36 0.42
0.17 0.22 0.36 0.42 0.32 0.41 0.58 0.65 0.32 0.41 0.58 0.65 0.58 0.63 0.80 0.86 0.58
0.63 0.80 0.86 0.17 0.22 0.36 0.42 0.17 0.22 0.36 0.42 0.00 0.00 0.02 0.07 0.00 0.00
0.02 0.07 0.32 0.41 0.58 0.65 0.32 0.41 0.58 0.65 0.00 0.00 0.02 0.07 0.00 0.00 0.02
0.07 0.72 0.78 0.92 0.97 0.72 0.78 0.92 0.97 0.04 0.10 0.18 0.23 0.04 0.10 0.18 0.23
0.17 0.22 0.36 0.42 0.17 0.22 0.36 0.42 0.17 0.22 0.36 0.42 0.17 0.22 0.36 0.42];

```

```

A4=[0.17 0.22 0.36 0.42 0.17 0.22 0.36 0.42 0.04 0.10 0.18 0.23 0.04 0.10 0.18
0.23 0.72 0.78 0.92 0.97 0.72 0.78 0.92 0.97 0.58 0.63 0.80 0.86 0.58 0.63 0.80 0.86
0.04 0.10 0.18 0.23 0.04 0.10 0.18 0.23 0.58 0.63 0.80 0.86 0.58 0.63 0.80 0.86 0.17
0.22 0.36 0.42 0.17 0.22 0.36 0.42 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.93 0.98
1.00 1.00 0.93 0.98 1.00 1.00 0.32 0.41 0.58 0.65 0.32 0.41 0.58 0.65 0.58 0.63 0.80
0.86 0.58 0.63 0.80 0.86 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 0.04 0.10 0.18 0.23
0.04 0.10 0.18 0.23 0.58 0.63 0.80 0.86 0.58 0.63 0.80 0.86 0.32 0.41 0.58 0.65 0.32
0.41 0.58 0.65 0.00 0.00 0.02 0.07 0.00 0.00 0.02 0.07 0.32 0.41 0.58 0.65 0.32 0.41
0.58 0.65 0.32 0.41 0.58 0.65 0.32 0.41 0.58 0.65 0.17 0.22 0.36 0.42 0.17 0.22 0.36
0.42 0.00 0.00 0.02 0.07 0.00 0.00 0.02 0.07 0.58 0.63 0.80 0.86 0.58 0.63 0.80 0.86
0.58 0.63 0.80 0.86 0.58 0.63 0.80 0.86 0.32 0.41 0.58 0.65 0.32 0.41 0.58 0.65 0.17
0.22 0.36 0.42 0.17 0.22 0.36 0.42 0.32 0.41 0.58 0.65 0.32 0.41 0.58 0.65 0.17 0.22
0.36 0.42 0.17 0.22 0.36 0.42 0.58 0.63 0.80 0.86 0.58 0.63 0.80 0.86 0.32 0.41 0.58
0.65 0.32 0.41 0.58 0.65 0.17 0.22 0.36 0.42 0.17 0.22 0.36 0.42 0.17 0.22 0.36 0.42
0.17 0.22 0.36 0.42 0.58 0.63 0.80 0.86 0.58 0.63 0.80 0.86 0.72 0.78 0.92 0.97 0.72
0.78 0.92 0.97 0.04 0.10 0.18 0.23 0.04 0.10 0.18 0.23 0.58 0.63 0.80 0.86 0.58 0.63
0.80 0.86 0.17 0.22 0.36 0.42 0.17 0.22 0.36 0.42 0.17 0.22 0.36 0.42 0.17 0.22 0.36
0.42 0.72 0.78 0.92 0.97 0.72 0.78 0.92 0.97 0.72 0.78 0.92 0.97 0.72 0.78 0.92 0.97
0.17 0.22 0.36 0.42 0.17 0.22 0.36 0.42 0.04 0.10 0.18 0.23 0.04 0.10 0.18 0.23];

```

```
a1=sum(A1)/10;
```

```
a2=sum(A2)/10;
```

```
a3=sum(A3)/10;
```

```
a4=sum(A4)/10;
```

```
v=[0.93 0.98 1.00 1.00 0.93 0.98 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00
1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 0.93 0.98 1.00 1.00 0.93 0.98 1.00 1.00];
```

```
b1=abs(a1-v)
```

```
b2=abs(a2-v)
```

```
b3=abs(a3-v)
```

```
b4=abs(a4-v)。
```

——7.4节决策程序——

```

——-2012.9.16——
——-判断值矩阵V——
clc
clear
b1=[0.5320 0.5230 0.4180 0.3640 0.5320 0.5230 0.4180 0.3640 0.7780 0.7280
0.6120 0.5540 0.7780 0.7280 0.6120 0.5540 0.7200 0.6630 0.5200 0.4580 0.7200
0.6630 0.5200 0.4580 0.4800 0.4990 0.4520 0.4190 0.4800 0.4990 0.4520 0.4190];
b2=[0.4420 0.4330 0.3100 0.2540 0.4420 0.4330 0.3100 0.2540 0.4710 0.4100
0.2520 0.1930 0.4710 0.4100 0.2520 0.1930 0.6430 0.5650 0.3980 0.3310 0.6430
0.5650 0.3980 0.3310 0.5120 0.5160 0.4520 0.4120 0.5120 0.5160 0.4520 0.4120];
b3=[0.6070 0.5960 0.4880 0.4300 0.6070 0.5960 0.4880 0.4300 0.6120 0.5600
0.4260 0.3690 0.6120 0.5600 0.4260 0.3690 0.7030 0.6370 0.4940 0.4310 0.7030
0.6370 0.4940 0.4310 0.4720 0.4690 0.3700 0.3210 0.4720 0.4690 0.3700 0.3210];
b4=[0.5970 0.5850 0.4860 0.4340 0.5970 0.5850 0.4860 0.4340 0.5940 0.5340
0.3820 0.3220 0.5940 0.5340 0.3820 0.3220 0.6220 0.5630 0.4080 0.3470 0.6220
0.5630 0.4080 0.3470 0.6300 0.6440 0.5760 0.5310 0.6300 0.6440 0.5760 0.5310];
c1=sum((b1)')/4
c2=sum((b2)')/4
c3=sum((b3)')/4
c4=sum((b4)')/4
D=[0.4593 0.4593 0.6680 0.6680 0.5903 0.5903 0.4625 0.4625 0.3598 0.3598
0.3315 0.3315 0.4842 0.4842 0.4730 0.4730 0.5303 0.5303 0.4918 0.4918 0.5662
0.5662 0.4080 0.4080 0.5255 0.5255 0.4580 0.4580 0.4850 0.4850 0.5953 0.5953];
e1=0.8*D(:,1)
e2=1.0*D(:,2)
e=1-e1-e2。
——7.4节决策程序——
——-2012.9.16——
——-判断值矩阵V——
clc
clear
w=[0.32 0.41 0.58 0.65 0.32 0.41 0.58 0.65 0.72 0.78 0.92 0.97 0.72 0.78 0.92
0.97 0.17 0.22 0.36 0.42 0.17 0.22 0.36 0.42 0.93 0.98 1.00 1.00 0.93 0.98 1.00 1.00];
for i=1:4 b(i)=0.8/6*((w(i,3)-w(i,2))/(w(i,4)-w(i,1))+2);
a(i)=(b(i)*(w(i,3)+w(i,2))+(w(i,4)+w(i,1))*(0.8-b(i)))/1.6;
end

```

```
for i=1:4
d(i)=1/6*((w(i,7)-w(i,6))/(w(i,8)-w(i,5))+2);
c(i)=(d(i)*(w(i,7)+w(i,6))+(w(i,8)+w(i,5))*(1-d(i)))/2;
end
b=[0.3354 0.3413 0.3413 0.3048];
a =[ 0.4892 0.8471 0.2929 0.9745];
d=[0.4192 0.4267 0.4267 0.3810];
c =[ 0.4892 0.8471 0.2929 0.9745];
e=(a+c)/2
f=(b+d)/2
E=[ 0.5942 0.9301 0.4830 1.0331]
E=E/sum(E)
O=E*[0.1733 0.2024 0.0625 0.1675 0.3524 0.4033 0.1284 0.1486 0.0455 0.1148
0.0192 0.2656 0.0541 0.1756 0.1270 0.0715 ]
```

攻读博士学位期间主要科研成果

参与完成的项目

1. 国家自然科学基金项目“面向冲突的多目标多阶段复杂动态应急决策模型研究”(编号: 71171202), 2012-2015年(第六);
2. 国家自然科学基金项目“面向特大自然灾害的复杂随机多维属性大群体决策模型研究”(编号: 70871121), 2009-2011年(徐选华主持);
3. 国家社会科学重点项目“区域重特大灾害社会风险演化机理研究”(编号: 12AZD109), 2012-2015年(第五);
4. 参与编写专著“面向特大自然灾害复杂大群体决策模型及应用”, 徐选华, 北京: 科学出版社, 2012.

学术论文

1. Liyuan Zhang, Xuanhua Xu, Xiaohong Chen. A New Similarity Measure for Intuitionistic Fuzzy Sets and Its Applications, *International Journal of Information and Management Sciences*, 2012, 23(2): 229-239 (EI检索);
2. Liyuan Zhang, Xuanhua Xu, Tao Li. Some similarity measures for triangular fuzzy number and their applications in multiple criteria group decision making, *Journal of Applied Mathematics*, 2013, 文献号: 538261.(SCI检索, IF=0.6);
3. Tao Li, Liyuan Zhang, Xuanhua Xu. The GI/Geo/1 Queue with Bernoulli-Schedule-Controlled Vacation and Vacation Interruption, *Computers & Operations Research*, 2013, 40(7): 1680-1692. (SCI检索, IF=1.9);
4. 徐选华, 张丽媛, 陈晓红. 模糊偏好下基于属性二元关系的群体聚类方法, *系统工程与电子技术*, 2012, 34(11): 2312-2317. (EI检索);
5. 徐选华, 张丽媛, 陈晓红. 一种基于属性二元关系的大群体决策方法及应用, *中国管理科学*, 2012, 20 (5): 157-162. (CSSCI);
6. 张丽媛, 徐选华, 李涛. 基于直觉梯形模糊偏好相似度的多属性决策方法, *数学的实践与认识*, 2012, 42 (24): 167-174.(CSCD);
7. Xuanhua Xu, Liyuan Zhang. A Variation Coefficient Similarity Measure and Its Application in Emergency Group Decision-making, *System Engineering Procdia*, 2012, 5: 119-124. (EI期刊);
8. Tao Li, Liyuan Zhang, Xuanhua Xu. The GI/Geo/1 Queue with Start-up Period and Single Working Vacation and Bernoulli Vacation Interruption, *Journal of Information & Computational Science*, 2012, 9(9):2659-2673. (EI检索);

9. Liyuan Zhang Xuanhua Xu. Consensus model for multiple criteria group decision making under fuzzy environment, Knowledge-Based Systems (SCI, In press)

致 谢

本文是在很多人的帮助下完成的，在此论文完成之际，谨向给予我无私帮助的老师、同学以及朋友致以诚挚的感谢。

首先，我要衷心感谢徐选华教授的培养教育。徐老师三年来的悉心指导，使我顺利进入群决策方法与模型论这个异常活跃的研究领域。徐老师渊博的知识，严谨的治学态度，宽阔的视野，以及对学生和蔼可亲、细心，必将深刻影响着我日后的工作和生活，自己取得的点滴成绩无不凝聚着徐老师的心血。我还要感谢我的硕士生导师韩旭里教授对我的谆谆教诲和悉心关怀，在中南读书的六年里，他给予了我生活上、学习上无微不至的关心。在此，谨向两位恩师致以深深的敬意和由衷的感谢！

衷心感谢中南大学商学院各位老师给予的帮助，特别是陈晓红教授、王坚强教授、刘咏梅教授、周艳菊教授、吴良刚教授、彭丹老师、何颖芳老师和张艳玲老师。感谢10级博士同学刘一鸣、杨恶恶、李中、赵玉洁等以及胡浩、张科、黄智丽、周声海、王敏赛等众位师弟师妹，跟他们的交流和探讨使我的研究能力得到了很大的提高。同时，我也要衷心感谢中南大学数学院各位老师给予的帮助，感谢数学院的同学王小捷、李波和韩门兄弟姐妹给予我的支持和帮助。特别感谢我的好朋友陈雪娇、王笃稳、蔚玉辉。

依稀记得6年前的那个秋天，因为厌倦被家人呵护的生活，独自一人来到长沙，我一直以为我不喜欢这个潮湿陌生的城市，可没想到，我会在这里度过了最美好的6年青春时光。在中南，我失败过、沮丧绝望过，老师给我指路，给我希望；笑过、哭过，有一群志同道合的朋友陪着。如今要离开她，会伤感会落泪，太多太多的不舍。“中南”是心中永远抹不去的记忆。

最后我要感谢我的母亲，父亲离世的15年，她用坚强和善良为我打造了无忧无虑的天空，让我可以一路追逐自己的梦想。她用最淳朴的母爱，给我鼓励支持，让我顺利完成学业。感谢我弟弟和男朋友，感谢我的家人，无私的支持我也感谢18年求学过程，给予我帮助的老师 and 同学！

谨以此文感谢一路相伴于我的人们！